



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

## MATEMATICKÉ PRINCIPY NAVIGACE

MATHEMATICS PRINCIPLES OF NAVIGATION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

BRANISLAV PETROVIČ

VEDOUcí PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. JAROSLAV HRDINA, Ph.D.

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2010/2011

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Branislav Petrovič

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Matematické principy navigace**

v anglickém jazyce:

### **Mathematics principles of Navigation**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Navigační systém GPS lokalizuje naši pozici tak, že zpracovává signál ze tří družic umístěných na oběžné dráze. Výsledné tři kvadratické rovnice pak přesně určují polohu. Případná čtvrtá synchronizuje čas. Při její analýze se tedy převážně využívají principy lineární algebry. V modernějších přístrojích se, ale ukazuje jako důležité při výpočtu uvažovat i další aspekty přenosu signálu (atmosféru, spec. teorii relativity). Práce se bude věnovat právě těmto zpřesněním.

Cíle bakalářské práce:

Pochopení základních principů navigace a to převážně systému GPS.

Seznam odborné literatury:

- [1] Mark de Berg, Marc van Kreveld, Mark Overmars, Otfried Schwarzkopf  
Computational Geometry: Algorithms and Applications, Springer; 3rd edition (2008)
- [2] Christiane Rousseau, Mathematics and Technology, Springer Undergraduate Texts in  
Mathematics and Technology (2008)
- [3] Edwin F. Taylor, Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity, Addison Wesley  
Longman (2000)

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 23.11.2010

L.S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.  
Děkan fakulty

## **Abstrakt**

Táto bakalárska práca sa zaoberá výpočtami pozície GPS prijímača s využitím metódy Cramerovho pravidla. Následne popisuje chyby vytvorené počas prenosu. Zaoberá sa tak tiež zavedením geodetických súradníc pre vypočítanú pozíciu v priestore. Na výpočty pozície prijímača pomocou Cramerovho pravidla a na výpočty v geodézii je použité prostredie MATLAB.

## **Abstract**

This bachelor's thesis deals with the calculating of the position of the GPS receiver using the method of Cramer's rule. Subsequently, the errors generated during the transmission are described. The geodetic coordinates for the calculated position in space are introduced. The calculations of the receiver position by Cramer's rule and the calculations in geodesy are performed using MATLAB.

## **klíčová slova**

determinant, Cramerovo pravidlo, družicová navigácia, GPS

## **key words**

determinant, Cramer's rule, satellite navigation, GPS

PETROVIČ, B. Matematické principy navigace. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 36 s. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

Prehlasujem, že som bakalársku prácu *Matematické princípy navigace* vypracoval samostatne podľa pokynov vedúceho bakalárskej práce Mgr. Jaroslava Hrdinu, Ph.D. a s využitím uvedenej literatúry.

Branislav Petrovič

Ďakujem svojmu školiťovi Mgr. Jaroslavovi Hrdinovi, Ph.D. za cenné pripomienky a rady. Taktiež by som chcel poďakovať Ing. Pavlovi Ptáčkovi, študentovi Leteckého ústavu FSI, za konzultácie a poskytnuté dáta.

Branislav Petrovič

# Obsah

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Úvod</b>  | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Použitá algebra</b>                                     | <b>3</b>  |
| 2.1      | Vektorové priestory . . . . .                              | 3         |
| 2.2      | Matice . . . . .   | 4         |
| 2.3      | Determinanty matíc . . . . .                               | 4         |
| 2.3.1    | Permutácie . . . . .                                       | 5         |
| 2.3.2    | Determinanty . . . . .                                     | 6         |
| 2.3.3    | Orientované objemy . . . . .                               | 10        |
| 2.4      | Sústavy lineárnych rovníc . . . . .                        | 13        |
| 2.4.1    | Cramerovo pravidlo . . . . .                               | 13        |
| <b>3</b> | <b>Určovanie polohy prijímača</b>                          | <b>16</b> |
| 3.1      | Teoretický výpočet pozície . . . . .                       | 16        |
| 3.2      | Výpočet v praxi . . . . .                                  | 17        |
| 3.2.1    | Základný výpočet s časovou odchýlkou $\tau_{od}$ . . . . . | 18        |
| 3.2.2    | Vplyv atmosféry . . . . .                                  | 20        |
| 3.2.3    | Vplyv relativistického efektu . . . . .                    | 21        |
| <b>4</b> | <b>Prijímač v súradnicovom systéme</b>                     | <b>23</b> |
| 4.1      | Úvod do problematiky . . . . .                             | 23        |
| 4.2      | Translácia a rotácia lokálnej sústavy . . . . .            | 24        |
| 4.3      | Zavedenie systému WGS 84 . . . . .                         | 25        |
| 4.4      | Geodetické zemepisné súradnice . . . . .                   | 26        |
| <b>5</b> | <b>Výpočty s reálnymi hodnotami prijímača GPS</b>          | <b>28</b> |
| 5.1      | Výpočet pozície prijímača . . . . .                        | 28        |
| 5.2      | Výpočet nadmorskej výšky . . . . .                         | 31        |
| <b>6</b> | <b>Záver</b>   | <b>35</b> |
|          | <b>Literatúra</b>  | <b>36</b> |



# 1 Úvod

## História

Ľudia sa už oddávna snažili orientovať vo svojom priestore, ktorý ich obklopoval, pomocou istých cyklických úkazov alebo neskôr prístrojov. Prvým prístrojom na určenie pozície nebeských telies považujeme astroláb. Využívali ho hlavne astronómovia, astrológovia a navigátori. Chronologicky za ním prichádza kompas, ktorý sa datuje od 4. storočia n.l. Až v 18. storočí prichádza ďalší podstatný navigačný prístroj, sextant. Na princíp sextantu ako prvý prišiel Isaac Newton.

## Súčasnosť

Najznámejšie Globálne družicové polohové systémy (Global Navigation Satellite System - GNSS):

- **GPS** (Global Positioning System) systém prevádzkuje Ministerstvo obrany U.S.A.
- **GLONASS** (Globalnaja navigacionnaja sputnikovaja sistema) systém prevádzkuje Ruská armáda
- **Galileo** navigačný systém, plánovaný projekt Európskej únie, ktorý by mal zabezpečiť nezávislosť od GPS systému

## Rozdelenie práce

V nasledujúcej kapitole budeme pojednávať o algebraickom základe, potrebnom k pochopeniu ďalších kapitôl. Zameriame sa na prvky vektorového priestoru, determinanty a Cramerovo pravidlo. Determinanty rozoberieme z dvoch pohľadov. Prvý bude vychádzať priamo z definície a druhý pohľad bude prostredníctvom orientovaných objemov. Pre Cramerovo pravidlo si ukážeme geometrické odvodenie na  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$ .

Tretia kapitola nám vysvetlí teoretický výpočet pozície. Budeme v nej riešiť, aké rozostavenie satelitov nám zaistí konečný počet riešení. V tejto kapitole si uvedieme metódu výpočtu pozície prijímača na základe Cramerovho pravidla. Následne popisujeme nežiadúce faktory z praxe, ktoré veľkou mierou vplyvajú na presnosť výpočtu pozície.

Na začiatku štvrtej kapitoly zavedieme niektoré geodetické pojmy ako úvod do tejto problematiky. Pokračujeme zavedením referenčného elipsoidu WGS-84, ktorý bol vytvorený práve pre potreby GPS. V kapitole je tiež vysvetlený problém s určením nadmorskej výšky.

Nadobudnuté vedomosti využívame v piatej kapitole, ktorá je zameraná prakticky. Zo získaných reálnych dát počítame polohu algoritmom popísaným v tretej kapitole. Následne prepočítavame pozíciu aj na zemepisné geodetické súradnice, podľa ktorých sa už vieme orientovať na Zemi. Výpočty završíme výpočtom nadmorskej výšky, pre bod prijímača. Naše výpočty prebiehajú v prostredí Matlab, preto sú súčasťou kapitoly aj zdrojové kódy.

## 2 Použitá algebra

Zadefinované pojmy z tejto kapitoly sú v literatúre [8] a [3]. Všetky výpočty v tejto práci sú uskutočňované nad poľom  $\mathbb{R}$ , preto budeme matematické objekty definovať nad týmto poľom, ak nebude uvedené inak.

### 2.1 Vektorové priestory

**Definícia.** *Vektorovým priestorom*  $\mathbb{V}$  nad  $\mathbb{R}$  rozumieme množinu  $\mathbb{V}$  spolu s operáciami sčítania a násobenia skalármi. Prvky vektorového priestoru budeme nazývať vektory (značíme  $\bar{\phantom{x}}$ ).

Axiómy sčítania:

- (i)  $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}), \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{V}$
- (ii)  $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}, \forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{V}$
- (iii)  $\exists \bar{0} \in \mathbb{V}, \bar{u} + \bar{0} = \bar{u}, \forall \bar{u} \in \mathbb{V}$
- (iv)  $\forall \bar{u} \in \mathbb{V}, \exists (-\bar{u}) \in \mathbb{V}, \bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$

Axiómy násobenia skalármi:

- (i)  $a \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = a \cdot \bar{u} + a \cdot \bar{v}, \forall a \in \mathbb{R}, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{V}$
- (ii)  $(a + b) \cdot \bar{u} = a \cdot \bar{u} + b \cdot \bar{u}, \forall a, b \in \mathbb{R}, \bar{u} \in \mathbb{V}$
- (iii)  $a \cdot (b \cdot \bar{u}) = (a \cdot b) \cdot \bar{u}, \forall a, b \in \mathbb{R}, \bar{u} \in \mathbb{V}$
- (iv)  $1 \cdot \bar{u} = \bar{u}, \forall \bar{u} \in \mathbb{V}$

V ďalšom texte budeme uvažovať množinu  $\mathbb{R}^n$  všetkých  $n$ -tic  $(w_1, \dots, w_n)$ , kde  $w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ . Sčítanie vektorov definujeme po zložkách. Násobenie vektora  $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$  skalárom  $a \in \mathbb{R}$  definujeme taktiež po zložkách. Množina  $\mathbb{R}^n$  s týmito operáciami tvorí vektorový priestor. Veľkosť vektora  $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$  budeme označovať  $|\bar{w}|$  a počítame  $|\bar{w}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}$ .

**Definícia.** Množina vektorov  $M = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\} \subset \mathbb{V}$  vo vektorovom priestore sa nazýva *lineárne nezávislá*, ak pre každé skaláry  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  platí:

$$a_1 \cdot \bar{w}_1 + \dots + a_k \cdot \bar{w}_k = \bar{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

**Definícia.** Množina  $M = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \subset \mathbb{V}$  *generuje* vektorový priestor  $\mathbb{V}$ , ak platí:

$$\forall \bar{w} \in \mathbb{V} : \exists k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R} \text{ tak, že } k_1 \bar{v}_1 + \dots + k_n \bar{v}_k = \bar{w}.$$

Potom vektory  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$  voláme *generátormi* vektorového priestoru, čísla  $k_1, \dots, k_n$  *súradnicami* vektora  $\bar{w}$  v báze  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$  a výrazy tvaru  $k_1 \bar{v}_1 + \dots + k_n \bar{v}_k$  nazývame lineárnou kombináciou vektorov  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ .

**Definícia.** Majme vektorový priestor  $\mathbb{V}$ . Nech vektory  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_k \in \mathbb{V}, k \in \mathbb{N}$  tvoria maximálnu nezávislú sústavu vektorov z  $\mathbb{V}$ , potom sústava  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_k$  je *bázou* tohoto vektorového priestoru.

A teda platí pre každý vektor  $\bar{z} \in \mathbb{V}$ , že ho môžeme jednoznačne vyjadriť v súradniciach bázovými vektormi takto:  $\bar{z} = s_1 \cdot \bar{z}_1 + s_2 \cdot \bar{z}_2 + \dots + s_k \cdot \bar{z}_k$  kde  $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathbb{R}$

**Poznámka.** Bázu vektorového priestoru môžeme nadefinovať, taktiež ako minimálnu množinu generátorov vektorového priestoru.

**Poznámka.** Známa je *štandardná báza* vektorového priestoru  $\mathbb{R}^n$ , ktorá má za prvky

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0)^T \\ \bar{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0)^T \\ &\vdots \\ \bar{e}_n &= (0, 0, \dots, 1)^T.\end{aligned}$$

**Definícia.** *Vektorový súčin* v pravotočivom súradnicovom systéme definujeme takto

$$\bar{k} \times \bar{l} = \bar{n} \cdot |\bar{k}| \cdot |\bar{l}| \cdot \sin(\alpha),$$

kde  $\bar{n}$  je jednotkový normálový vektor (smer je určený podľa pravidla pravej ruky) a  $\alpha$  je uhol zvieraný vektormi  $\bar{k}$  a  $\bar{l}$ .

**Poznámka.** Pravidlo pravej ruky aplikované na vektorový súčin znie takto: Nech pre dva vektory  $\forall \bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$  platí, že  $\bar{a}$  a  $\bar{b}$  sú vyjadrené ukazovákom a prostredníkom pravej ruky, potom vektorový súčin  $\bar{a} \times \bar{b}$  má smer palca.

**Poznámka.** Z definície vektorového súčinu môžeme odvodiť antikomutativnosť vektorového súčinu takto

$$\left. \begin{aligned}\bar{k} \times \bar{l} &= \bar{n} \cdot |\bar{k}| \cdot |\bar{l}| \cdot \sin(\alpha) \\ \bar{l} \times \bar{k} &= \bar{n} \cdot |\bar{l}| \cdot |\bar{k}| \cdot \sin(2\pi - \alpha) = -\bar{n} \cdot |\bar{k}| \cdot |\bar{l}| \cdot \sin(\alpha)\end{aligned} \right\} \bar{k} \times \bar{l} = -\bar{l} \times \bar{k}.$$

## 2.2 Matice

Množinu všetkých matíc typu  $m \times n$  nad  $\mathbb{R}$  budeme značiť  $Mat_{mn}(\mathbb{R})$ . Štvorcovú maticu potom označíme  $Mat_m(\mathbb{R})$ .

*Nezávislý riadok* matice rozumieme riadok, ktorý nemožno vytvoriť lineárnou kombináciou ostatných riadkov matice.

**Definícia.** Majme maticu  $\mathbf{A} \in Mat_{mn}(\mathbb{R})$ . *Hodnosťou matice* nazývame maximálny počet jej nezávislých riadkov. Štvorcovú maticu  $\mathbf{A} \in Mat_m(\mathbb{R})$  nazývame *regulárnou*, ak jej hodnosť je rovná  $m$  v opačnom prípade ju nazývame *singulárnou*. Hodnosť matice  $\mathbf{A}$  značíme  $h(\mathbf{A})$ .

**Definícia.** Nech  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in Mat_{mn}(\mathbb{R})$  potom maticu  $\mathbf{A}^T = (\hat{a}_{ij}) \in Mat_{nm}(\mathbb{R})$  s prvkami  $\hat{a}_{ij} = a_{ji}$  nazývame maticou *transponovanou* k matici  $\mathbf{A}$ . *Symetrickou* maticou  $\mathbf{A}$  nazývame takú maticu, že platí  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  a maticu  $\mathbf{A}$  nazývame *antisymetrickou* ak platí  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ .

## 2.3 Determinanty matíc

Pre zavedenie determinantu musíme najprv zaviesť pojem permutácie z [8].

### 2.3.1 Permutácie

**Definícia.** *Permutáciou* množiny  $X$  rozumieme bijektívne zobrazenie množiny  $X$  na seba.

Permutáciu  $\sigma$  konečnej množiny  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  môžeme zapísať pomocou výsledného poradia vo forme tabuľky:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Ak platí  $\sigma(x) = x$  pre  $x \in X$  potom  $x$  nazývame *samodružným prvkom* permutácie  $\sigma$ . Ak existujú práve dva prvky  $x, y \in X$  pre ktoré platia vzťahy  $\sigma(x) = y$  a  $\sigma(y) = x$  a všetky ostatné prvky sú samodružné, potom permutáciu nazývame *transpozíciou* (značíme  $(x, y)$ ).

**Veta 2.1.** Každá permutácia konečnej množiny je súčinom transpozícií.

*Dôkaz.* Na množine  $X$  zadefinujeme reláciu  $\sim$  takto:  $a \sim b$  práve vtedy, keď existuje  $k \in \mathbb{Z}$  s vlastnosťou  $b = \sigma^k(a)$ , kde pre  $k > 0$  je  $\sigma^k(a) = \sigma(\dots\sigma(\sigma(a))\dots)$ ,  $\sigma^0(a) = a$  a pre záporné  $k$  zavedieme  $\sigma^k = (\sigma^{-1})^{-k}$ . Kde  $\sigma^{-1}$  je inverzné zobrazenie (tj.  $\sigma^{-1}(\sigma(a)) = a$ ).

Relácia  $\sim$  splňuje:

- (i)  $a \sim a$ , pretože  $\sigma^0(a) = a$  (reflexivita)
- (ii)  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ , pretože  $\sigma^k(a) = b$  práve vtedy, keď  $a = \sigma^{-k}(b)$  (symetria)
- (iii)  $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$ , pretože  $\sigma^k \circ \sigma^l = \sigma^{k+l}$  (tranzitivita)

Reláciu splňujúcu reflexivitu, symetriu a tranzitivitu nazývame ekvivalenciou. A vieme, že ekvivalencia na množine produkuje rozklad množiny na triedy. Uvažujme preto jednu triedu obsahujúcu  $a \in X$ . Množina  $X$  je konečná, preto platí  $\sigma^p(a) = \sigma^q(a)$  pre určité  $0 \leq p < q$ . Uvažujme najmenšie nezáporné  $p$ , ale pretože pre každú dvojicu  $\sigma^p(a) = \sigma^q(a)$   $p < q$ , môžeme písať  $\sigma^0(a) = \sigma^{q-p}(a)$  musí byť  $p = 0$  a teda  $a = \sigma^q(a)$ . Následne pre  $a$ , vytvorme príslušnú triedu ako množinu  $\{a, \sigma(a), \dots, \sigma^{q-1}(a)\}$ . Takáto množina je triedou rozkladu na množine  $X$  obsahujúcou  $a$ . Obdobne môžeme vytvoriť množinu pre každý prvok  $b \in X$ . Zúžením permutácie  $\sigma$  k tejto podmnožine môžeme zapísať ako zloženie transpozícií

$$(a, \sigma^{q-1}(a)) \circ (a, \sigma^{q-2}(a)) \circ \dots \circ (a, \sigma(a)).$$

Zúženie permutácie  $\sigma$  rozšírime na permutáciu celej množiny  $X$  tak, že všetky ostatné body (mimo uvažovanej triedy ekvivalencie) budú samodružné. Ak je teda celý rozklad na triedy možné vyjadriť ako  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_r$ , potom pôvodnú permutáciu  $\sigma$  vyjadrujeme ako zloženie  $r$  permutácií  $\sigma_i$ , zodpovedajúcej jednotlivým triedam. Veta je dokázaná, pretože permutácie  $\sigma_i$  sme už vyjadrili ako zloženie transpozícií.  $\square$

Permutácii  $\sigma_i$  rozšírenej z triedy  $X_i$  na celé  $X$  hovoríme *cyklus*. *Dĺžkou cyklu*  $\sigma_i$  rozumieme počet permutovaných prvkov, takže  $\text{card}(X_i)$ . Dĺžka permutácie  $\sigma$  je počet prvkov  $X$ , ktoré nie sú samodružné.

**Definícia.** Dvojica prvkov  $a, b \in X = \{1, 2, \dots, n\}$  tvorí *inverziu* v permutácii  $\sigma$ , ak  $a < b$  a  $\sigma(a) > \sigma(b)$ . Permutáciu nazývame *párnou* ak má párny počet inverzií, v opačnom prípade ju nazveme *nepárnou*. *Paritu* permutácie definujeme  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{počet inverzií}}$ .

**Poznámka.** Uvažujme ľubovoľnú permutáciu  $\sigma$  na množine  $X = \{1, \dots, n\}$ . Ak k permutácii pridáme zložením transpozíciu  $(i, j)$ , pre paritu novej permutácie  $\sigma \circ (i, j)$  platí:

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ (i, j)) = \operatorname{sgn}(\sigma)(-1)^{m_{ij} + m_{ia, aj}},$$

kde exponent vyjadruje o koľko sa zmení počet inverzií a index označuje členy inverzie. Samotné  $i, j$  buď vytvorí alebo zruší jednu inverziu v  $\sigma$ , preto  $m_{ij}$  je nepárne číslo z  $\{-1, 1\}$ . Pre inverzie s prvkom  $a \in X - \{i, j\}$ , platí  $i, a$  a  $j, a$  súčasne vytvoria dve inverzie, zrušia dve inverzie v  $\sigma$  alebo jedna vznikne a jedna zanikne (tj.  $m_{ia, aj}$  je párne číslo z  $\{-2, 0, 2\}$ ). Počet ostatných inverzií bez  $i$  a  $j$  sa nezmení. Potom  $m_{ij} + m_{ia, aj}$  je nepárne a z toho môžeme usúdiť, že jedna pridaná transpozícia mení znamienko parity. Zoberieme začiatok  $\operatorname{sgn}(\sigma^0) = 1$ , pretože identická permutácia nemá inverzie a ani transpozície. Pridaním jednej transpozície vznikne nepárny počet inverzií (transpozícií je tiež nepárny počet), preto sa opakovanne súhlasne mení hodnota parity. Preto taktiež platí

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{počet transpozícií}}.$$

### 2.3.2 Determinanty

**Definícia.** Majme štvorcovú maticu  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ . Potom *determinant* matice  $\mathbf{A}$  definujeme vzťahom:

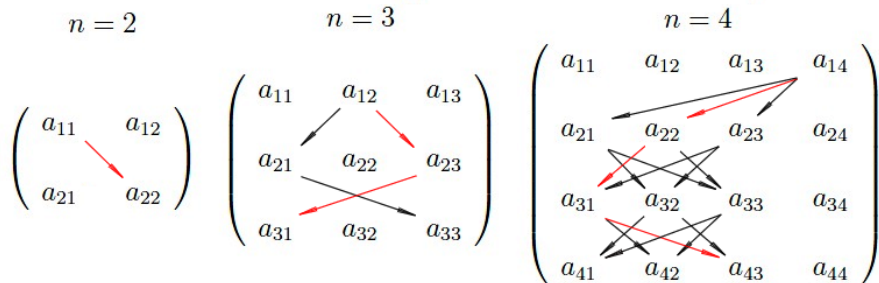
$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \quad (2.1)$$

kde  $\Sigma_n$  je množina všetkých permutácií na  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Každý z výrazov

$$\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

nazývame *člen determinantu*  $\det(\mathbf{A})$ .

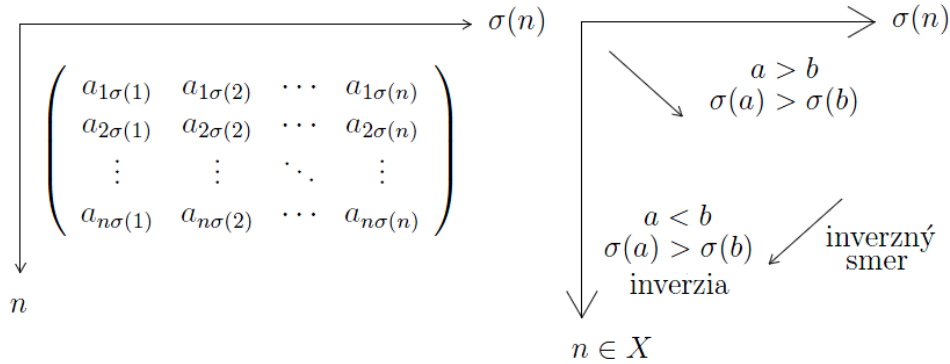
Vezmime si výpočet determinantu. Permutácia v indexoch prvkov  $a_{i\sigma(i)}$  matice  $\mathbf{A}$  nám hovorí, že do jedného člena determinantu vyberáme prvky z každého riadku a každého stĺpca matice práve raz. Zároveň potrebujeme zistiť paritu permutácie pre vybrané prvky. Zavedme si preto teraz pojem *trasa* v matici ako grafické znázornenie permutácie podľa



Obr. 1:

výberu prvkov v matici šípkami. Na obrázku 1. môžeme vidieť trasy vybraných prvkov členov determinantu.

V každej matici sú vybrané všetky možné trasy, pre pevne zvolený prvý prvok (v jednotlivých maticiach  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  a  $a_{14}$ ). Pre prehľadnosť sme zvýraznili jednu trasu na červeno. Tieto trasy sú naznačené bez parity permutácie, preto si teraz uvedieme ako z nich môžeme určiť paritu. Využijeme vzťah  $sgn(\sigma) = (-1)^{\text{počet inverzií}}$  a preto potrebujeme najprv vedieť kedy nastáva v trase inverzia. Zavedieme súradnicové osi, podľa obrázku 2., ktoré vysvetľujú ako súvisí smer šípky s inverziou. Nazvime tento smer *inverzným smerom*.



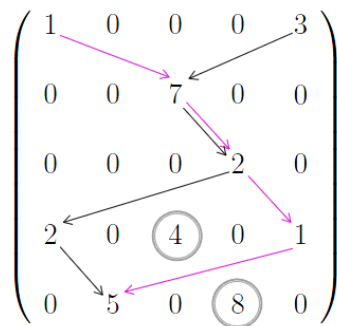
Obr. 2: Zavedené osy permutácie

Ak označíme všetky možné inverzné smery pre jednu trasu, môžeme potom jednoducho spočítať paritu permutácie tohoto výberu prvkov. Pre lepšiu predstavu si uvedieme príklad s takýmto riešením.

**Príklad 2.1.** Určte determinant riedkej matice **A**.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Na obrázku 3. vidíme zakrúžkované nenulové prvky matice, ktoré majú všetky členy



Obr. 3: Označenie trás

determinantov nulové, pretože v druhom a treťom riadku sú jediné nenulové prvky riadku práve na tejto pozícii.

Na obrázku 4. sme vyznačili všetky inverzné smery jednotlivých trás determinantu a následným spočítaním sme zistili paritu permutácie. Stačí už len dopočítať determinant podľa definície.

$$\det(A) = (-1)^3 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 + (-1)^8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = -70 + 420 = 350$$

Obr. 4: Označenie inverzií a následný výpočet determinantu

**Poznámka.** Samozrejme tento príklad nám má hlavne urobiť predstavu o celom výpočte. Pre takúto maticu by sme určite s výhodou využili Laplaceov rozvoj. Za zmienku stojí povedať, že keby sme vyjadrovali napríklad maticu rádu  $n$  Laplaceovým rozvojom až na matice  $1 \times 1$ , vyjadrili by sme vzťah z definície determinantu (2.1).

**Veta 2.2.** Platia nasledujúce vlastnosti pre determinant matice  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ :

- (i)  $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
- (ii) Ak je jeden riadok tvorený nulovými prvkami v  $\mathbf{A}$ , potom  $\det(\mathbf{A}) = 0$
- (iii) Ak matica  $\mathbf{B}$  vznikne z  $\mathbf{A}$  výmenou dvoch riadkov, potom  $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{B})$
- (iv) Ak matica  $\mathbf{B}$  vznikne z  $\mathbf{A}$  pripočítaním násobku riadku  $k$  inému riadku, potom sa determinant nezmení  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$
- (v) Ak matica  $\mathbf{B}$  vznikne z  $\mathbf{A}$  vynásobením riadku skalárom  $a \in \mathbb{R}$ , potom  $a \cdot \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$ .

Treba si uvedomiť že 1. vlastnosť  $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$  nám teda garantuje, že ak nejakú vlastnosť dokážeme v determinante pre riadok, tak platí aj pre stĺpec a naopak.

Uvedomme si, že štvrtá vlastnosť nám dovoľuje upravovať ľubovoľnú maticu bez zmeny hodnoty determinantu. Ak máme maticu so závislými riadkami, sme schopní ju upraviť na maticu s minimálne jedným nulovým riadkom. Teda takáto matica by mala determinant nulový. Ak máme maticu s  $n$  nezávislými riadkami, sme ju schopní upraviť na maximálne  $n$  nenulových riadkov. To je iný pohľad na hodnotu matice z definície.

*Dôkaz.* Vlastnosti dokážeme:

- (i) Členy determinantov  $\det(\mathbf{A})$  a  $\det(\mathbf{A}^T)$  sú v bijektívnej korešpondencii. Pretože platí

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

Avšak treba ešte rozhodnúť paritu. Platí  $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^0$ , teda  $\sigma^0$  je identická permutácia. Identická permutácia nemá transpozície, preto platí:

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = 1 \Rightarrow \sigma \circ \sigma^{-1} \text{ má párny počet transpozícií.}$$

Kedže párny počet transpozícií je možné rozdeliť len na súčet dvoch párných alebo dvoch nepárnych počtov transpozícií, platí

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}).$$

Tým je veta dokázaná.

- (ii) Vyplýva priamo z definície determinantu, pretože všetky jeho členy budú nulové.
- (iii) Vo všetkých členoch determinantu matice  $\mathbf{A}$  výmenou riadkov v permutácii vznikne transpozícia. Tým sa zmení parita členov a teda aj znamienko celého determinantu.
- (iv) Uvažujme, že matica  $\mathbf{B}$  vznikla pripočítaním  $i$ -teho riadku matice  $\mathbf{A}$  k jej  $j$ -tému riadku, kde  $i \neq j$ . Potom zo vytáhu (2.1) vyplýva:

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{j-1\sigma(j-1)} \cdot (a_{i\sigma(i)} + a_{j\sigma(j)}) \cdot a_{j+1\sigma(j+1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Kedže člen  $(a_{i\sigma(i)} + a_{j\sigma(j)})$  v súčine môžeme roznásobiť, dostaneme:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{j-1\sigma(j-1)} \cdot a_{j\sigma(j)} \cdot a_{j+1\sigma(j+1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} + \\ & \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{j-1\sigma(j-1)} \cdot a_{i\sigma(i)} \cdot a_{j+1\sigma(j+1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

Pre konečné  $n$  platí, že môžeme túto sumu rozdeliť na dve sumy takto:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{j-1\sigma(j-1)} \cdot a_{j\sigma(j)} \cdot a_{j+1\sigma(j+1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} + \\ & \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{j-1\sigma(j-1)} \cdot a_{i\sigma(i)} \cdot a_{j+1\sigma(j+1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

Potom zrejme prvý sčítanec je rovný  $\det(\mathbf{A})$ . Druhý sčítanec má v súčine dvakrát člen  $a_{i\sigma(i)}$ , preto matica takéhoto determinantu má  $i$ -ty a  $j$ -ty riadok rovnaký, maticu označme  $\mathbf{C}$ . Podľa vety (iii) vymeníme v matici  $\mathbf{C}$   $i$ -ty a  $j$ -ty riadok, potom  $\det(\mathbf{C}) = -\det(\mathbf{C})$ . To platí len pre  $\det(\mathbf{C}) = 0$ . Týmto je veta dokázaná.

- (v) Vyplýva priamo z definície determinantu, pretože každý člen determinantu matice  $\mathbf{B}$  je  $a$ -krát vynásobený člen determinantu matice  $\mathbf{A}$ .

□



### 2.3.3 Orientované objemy

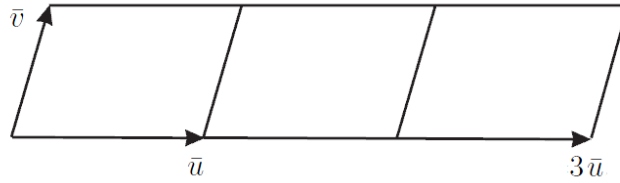
Podkapitola je spracovaná z literatúry [11], odkiaľ sú prevzaté lémy a definícia.

Uvažujme obsah rovinného útvaru  $X$  a označme ho  $\mathcal{P}(X)$ . Zrejme zobrazenie  $\mathcal{P}$  je kladné a pre zhodné útvary  $X, Y$  platí  $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y)$ . Pre útvary ktoré sú disjunktné platí  $\mathcal{P}(X \cup Y) = \mathcal{P}(X) + \mathcal{P}(Y)$ . Pre úsečku  $X$  platí  $\mathcal{P}(X) = 0$ .

Uvažujme obsah rovnobežníka tvoreného vektormi  $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{V}$  a označme ho  $\mathcal{P}(\bar{u}, \bar{v})$ . Zrejme platí

$$\mathcal{P}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathcal{P}(\bar{v}, \bar{u}) \quad \mathcal{P}(c \cdot \bar{u}, \bar{v}) = |c| \cdot \mathcal{P}(\bar{u}, \bar{v}),$$

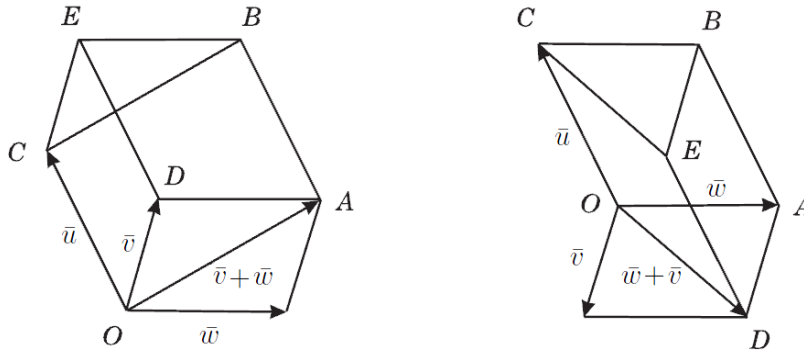
kde  $c \in \mathbb{R}$ . Na obrázku 5. je pre  $c = 3$  graficky interpretovaná druhá vlastnosť, ktorú nazývame *pozitívna homogenita*.



Obr. 5: [11]

Na obrázku 6. uvažujme dva rovinné útvary, nie priestorové. Na ľavom vidíme, že pre trojuholníky  $X_{OAD}$  a  $X_{CBE}$  platí  $\mathcal{P}(X_{OAD}) = \mathcal{P}(X_{CBE})$ . Potom priamo z obrázku vľavo vidíme rovnosť obsahov

$$\mathcal{P}(X_{OABC}) = \mathcal{P}(X_{ODEC}) + \mathcal{P}(X_{DABE}) \Rightarrow \mathcal{P}(\bar{v} + \bar{w}, \bar{u}) = \mathcal{P}(\bar{v}, \bar{u}) + \mathcal{P}(\bar{w}, \bar{u}). \quad (2.2)$$



Obr. 6: [11]

Na obrázku 6. vpravo usudzujeme analogicky. Pre trojuholníky  $X_{ODA}$  a  $X_{CEB}$  platí  $\mathcal{P}(X_{ODA}) = \mathcal{P}(X_{CEB})$ . Potom pre obsahy útvarov platí

$$\mathcal{P}(X_{OABC}) = \mathcal{P}(X_{ODEC}) + \mathcal{P}(X_{DABE}) \Rightarrow \mathcal{P}(\bar{w}, \bar{u}) = \mathcal{P}(\bar{w} + \bar{v}, \bar{u}) + \mathcal{P}(\bar{v}, \bar{u}). \quad (2.3)$$

Výsledok (2.2) bol očakávaný, ale výsledok (2.3) už nie. Pretože z toho vyplýva

$$\mathcal{P}(\bar{w} + \bar{v}, \bar{u}) = \mathcal{P}(\bar{w}, \bar{u}) - \mathcal{P}(\bar{v}, \bar{u}).$$

Zmena znamienka  $\mathcal{P}(\bar{v}, \bar{u})$  bola spôsobená zmenou smeru vektora  $\bar{v}$ . Preto zisťujeme potrebu orientovať plošný obsah, ktorý budeme nazývať *orientovaný plošný obsah*. Zmena orientácie plochy je závislá od vektorového súčinu dvoch vektorov, reprezentovaného normálovým vektorom. Analogicky si môžeme zaviesť pre  $\mathbb{R}^3$  *orientovaný objem* alebo pre  $\mathbb{R}^n$  zavedieme pojem *orientovaný  $n$ -rozmerný objem*.

**Definícia.** Nech  $\mathbb{V}$  je vektorový priestor nad poľom  $\mathbb{R}$  a  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ . Hovoríme, že zobrazenie  $F : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je

- (i)  *$n$ -lineárne* alebo tiež *multilineárne*, ak pre každé  $1 \leq j \leq n$  a ľubovoľné vektory  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_n \in \mathbb{V}$  priradenie

$$\bar{x} \mapsto F(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{x}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_n)$$

definuje lineárne zobrazenie  $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , t.j. pre všetky  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{V}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  platí

$$F(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, a\bar{x} + b\bar{y}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_n) = aF(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{x}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_n) + bF(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{y}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_n)$$

- (ii) *antisymetrické*, ak pre všetky  $1 \leq i < j \leq n$  a ľubovoľné vektory  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in \mathbb{V}$  platí

$$F(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i, \dots, \bar{v}_j, \dots, \bar{v}_n) = -F(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j, \dots, \bar{v}_i, \dots, \bar{v}_n)$$

- (iii) *alternujúce*, ak pre ľubovoľné  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in \mathbb{V}$  z podmienky  $\bar{v}_i = \bar{v}_j$  pre nejaké  $1 \leq i < j \leq n$  vyplýva

$$F(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) = 0.$$

**Lema 2.1.** Nech  $\mathbb{V}$  je vektorový priestor nad poľom  $\mathbb{R}$  a  $F : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je ľubovoľné zobrazenie

- (i)  $F$  antisymetrické  $\Rightarrow F$  alternujúce  
(ii)  $F$  multilineárne a alternujúce  $\Rightarrow F$  antisymetrické

*Dôkaz.* Dôkaz si uvidíme pre bilineárne zobrazenie:

- (i)  $F$  antisymetrické, preto môžeme vyjadriť

$$F(\bar{v}, \bar{v}) = -F(\bar{v}, \bar{v})$$

a z toho

$$2F(\bar{v}, \bar{v}) = 0 \Rightarrow F \text{ alternujúce}$$

- (ii)  $F$  alternujúce, preto

$$F(\bar{v} + \bar{w}, \bar{v} + \bar{w}) = 0$$

a pre bilinearitu platí

$$F(\bar{v}, \bar{v}) + F(\bar{v}, \bar{w}) + F(\bar{w}, \bar{v}) + F(\bar{w}, \bar{w}) = 0 \Rightarrow F(\bar{v}, \bar{w}) = -F(\bar{w}, \bar{v})$$

tým je  $F$  antisymetrické.

□

**Lema 2.2.** Nech  $F : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\kappa : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  sú ľubovoľné zobrazenia a  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in \mathbb{V}$ .

(i) Ak  $F$  je antisymetrické a  $\kappa$  je permutácia, tak

$$F(\bar{v}_{\kappa(1)}, \dots, \bar{v}_{\kappa(n)}) = \text{sgn}(\kappa) F(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$$

(ii) Ak  $F$  je alternujúce a  $\kappa$  nie je permutácia, tak

$$F(\bar{v}_{\kappa(1)}, \dots, \bar{v}_{\kappa(n)}) = 0.$$

*Dôkaz.* (i) Stačí si uvedomiť, že pre  $F$  sa každou zámienou dvoch vektorov, mení znamienko (antisymetria). To je obdobné s transpozíciou v permutácii, ktorá mení znamienko.

(ii) Ak  $\kappa$  nie je permutácia, potom pre aspoň dve rôzne  $1 \leq i, j \leq n$  platí

$$\kappa_i = \kappa_j \Rightarrow \bar{v}_{\kappa_i} = \bar{v}_{\kappa_j}$$

Pre alternáciu preto  $F(\bar{v}_{\kappa(1)}, \dots, \bar{v}_{\kappa(n)}) = 0$ .

□

Uvažujme  $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ , multilineárne zobrazenie  $F : (\mathbb{R}^n)^n \cong \in Mat_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $(\mathbb{R}^n)^n \cong \in Mat_n(\mathbb{R})$  je vektorový priestor. Majme  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in Mat_n(\mathbb{R})$ . Ďalej uvažujme  $j$ -ty stĺpec matice ako vektor v  $\mathbb{R}^n$ , potom  $\bar{a}_{\bullet j} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{e}_i$ . Potom pre vzťah  $F(\mathbf{A}) = F(\bar{a}_{\bullet 1}, \dots, \bar{a}_{\bullet n})$  rozložíme podľa multilinearity na jednotlivé členy

$$a_{\kappa(1)1} \dots a_{\kappa(n)n} F(\bar{e}_{\kappa(1)}, \dots, \bar{e}_{\kappa(n)}), \quad (2.4)$$

pretože  $\kappa$  je zobrazenie samo na seba na množine  $\{1, \dots, n\}$ , budeme mať  $n^n$  členov.

Ak zobrazenie  $\kappa$  je permutáciou ( $\kappa \in \sum_n$ ), potom v člene zo vzťahu (2.4) môžeme nahradiť

$$F(\bar{e}_{\kappa(1)}, \dots, \bar{e}_{\kappa(n)}) = \text{sgn}(\kappa) F(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = \text{sgn}(\kappa) F(\mathbf{I}_n),$$

v opačnom prípade je člen nulový, lema 2.2 (ii). Preto platí

$$F(\mathbf{A}) = \sum_{\kappa \in \sum_n} \text{sgn}(\kappa) \cdot a_{\kappa(1)1} \cdot a_{\kappa(2)2} \dots a_{\kappa(n)n}, \quad (2.5)$$

kde sme zvolili  $F(\mathbf{I}_n) = 1$ .

Môžeme si všimnúť že tento vzťah je veľmi podobný so vzťahom (2.1) pre výpočet determinantu. Oba vzťahy sú v konečnom dôsledku pre bijektívnu korešpondenciu totožné, po voľbe jednotkového objemu. Tým môžeme zaviesť význam determinantu taktiež ako orientovaného  $n$ -rozmerného objemu v priestore ( $F(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$ ). Zobrazenie  $F(\mathbf{A})$  resp. determinant  $\mathbf{A}$  vyjadruje napríklad pre  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  obsah rovnobežníka a pre  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  objem rovnobežnostena.

**Príklad 2.2.** Máme vektory  $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$  a  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Vektory  $\bar{u} = u_1 \bar{e}_1 + u_2 \bar{e}_2$ ,  $\bar{v} = v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2$  a matica  $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}) &= F(\bar{u}, \bar{v}) = F(u_1 \bar{e}_1 + u_2 \bar{e}_2, v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2) = \\ &= u_1 v_1 F(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + u_1 v_2 F(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + u_2 v_1 F(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + u_2 v_2 F(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = \\ &= u_1 v_2 F(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + u_2 v_1 F(\bar{e}_2, \bar{e}_1) = u_1 v_2 F(\bar{e}_1, \bar{e}_2) - u_2 v_1 F(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \\ &= u_1 v_2 - u_2 v_1 = \det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

## 2.4 Sústavy lineárnych rovníc

**Definícia.** Lineárnou rovnicou o  $n$  neznámych  $x_1, \dots, x_n$  nad  $\mathbb{R}$  je rovnica  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ , kde  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  nazývame *koeficienty* a číslo  $b \in \mathbb{R}$  nazývame *absolútny člen*.

Ak máme daných  $m \geq 1$  lineárnych rovníc o  $n$  neznámych nad  $\mathbb{R}$ , hovoríme o *systému rovníc*  $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Maticový zápis lineárnych rovníc vyzerá takto

$$\mathbf{A}\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \bar{b},$$

kde maticu  $\mathbf{A}$  nazývame *maticou sústavy*. Maticu

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

budeme nazývame *rozšírenou maticou sústavy*.

*Riešením sústavy* je  $n$ -tica  $(u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , ktorá pri dosadení  $x_i = u_i$  zmení rovnice na identity.

**Veta 2.3** (Frobeniova veta). Sústava lineárnych rovníc nad  $\mathbb{R}$  je *riešiteľná* práve vtedy, keď je hodnosť matice sústavy rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy  $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^*)$ .

Sústava  $\mathbf{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}$ ,  $\mathbf{A} \in Mat_{mn}(\mathbb{R})$  je *nedourčená*, keď je riešiteľná a počet neznámych je väčší ako hodnosť matice sústavy  $h(\mathbf{A})$ . Ak počet neznámych je rovný  $h(\mathbf{A})$  potom je riešením riešiteľnej sústavy práve jedno riešenie, teda je *určená*. *Preurčená* sústava je sústava ktorá je riešiteľná, ale má väčšiu hodnosť  $h(\mathbf{A})$  ako počet neznámych.

Pre výpočet riešenia určenej sústavy lineárnych rovníc je viacero metód. Veľmi známa je Gaussova eliminácia, pri ktorej sa ekvivalentnými úpravami dostávame na schodovitý tvar matice sústavy, pričom nemeníme množinu riešení. Spätne, jednoduchým dosadzovaním, pridáme k riešeniu. V tejto práci budeme používať tiež veľmi známu metódu, Cramerovo<sup>1</sup> pravidlo, ktoré si teraz zavedieme.

### 2.4.1 Cramerovo pravidlo

**Veta 2.4** (Cramerovo pravidlo). Nech je daná sústava lineárnych rovníc  $\mathbf{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}$ ,  $\mathbf{A} \in Mat_m(\mathbb{R})$  a nech  $(\det(\mathbf{A}))^{-1} \in \mathbb{R}$  existuje. Potom daná sústava má práve jedno riešenie  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$  a platí  $x_i = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \det(\mathbf{A}_i)$ , kde matica  $\mathbf{A}_i$  vznikla z matice  $\mathbf{A}$  nahradením  $i$ -tého stĺpca stĺpcom absolútneho člena.

Cramerovo pravidlo má nevýhodu oproti Gaussovej eliminácii v tom, že musí platiť podmienka  $(\det(\mathbf{A}))^{-1} \neq 0$ .

---

<sup>1</sup>*Gabriel Cramer* (1704-1752) bol švajčiarskym matematikom, profesor na Académie de Clavin v Ženeve. K najznámejším patria jeho pojednania ohľadom algebraických kriviek.

**Poznámka** (Geometrická interpretácia Cramerovho pravidla na  $\mathbb{R}^2$ ). Geometrickú interpretáciu ukážeme na  $\mathbb{R}^2$  a v ďalšej poznámke na  $\mathbb{R}^3$  ale všeobecne platí na  $\mathbb{R}^n$ . Majme sústavu

$$\begin{aligned} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} &= b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} &= b_2 \end{aligned} ,$$

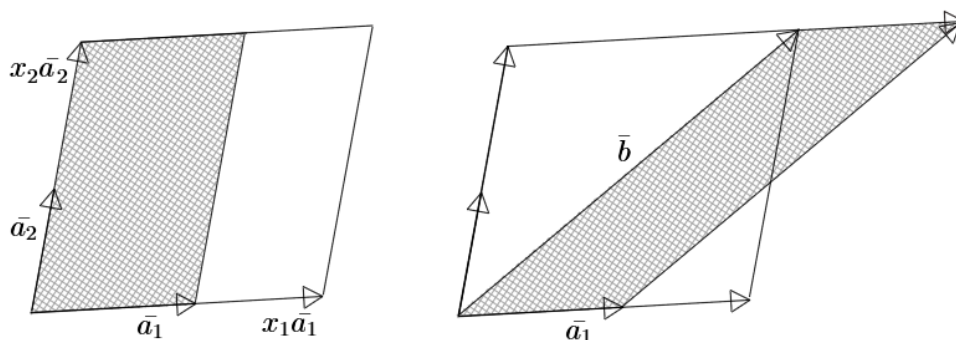
ktorú môžeme zapísať ako

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

alebo

$$x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 = \bar{b}.$$

Už vieme, že obsah rovnobežníka zloženého z vektorov  $\bar{a}_1$  a  $\bar{a}_2$  má obsah rovný determinantu matice sústavy  $\det(\mathbf{A})$ . Z Cavalieriho princípu, ktorý hovorí že telesá s rovnakými podstavami (základňami) a výškami majú rovnaký objem (obsah), vyplýva rovnosť kosoďlníkov tvorených z  $\bar{b}$ ,  $\bar{a}_1$  a  $x_2 \bar{a}_2$ ,  $\bar{a}_1$ .



Obr. 7: Geometrická interpretácia Cramerovho pravidla na  $\mathbb{R}^2$

A z toho vyplýva rovnosť determinantov

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & x_2 a_{12} \\ a_{21} & x_2 a_{22} \end{pmatrix} = x_2 \cdot \det(\mathbf{A}). \quad (2.6)$$

Druhá rovnosť platí z vety (2.2), ktorá hovorí, že vynásobením riadku resp. stĺpca matice  $\mathbf{A}$  skalárom  $r \in \mathbb{R}$  sa determinant zvýši  $r$ -násobne  $r \cdot \det(\mathbf{A})$ . Z rovnosti (2.6) priamo vyplýva Cramerovo pravidlo pre určovanie neznámej  $x_2$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

Analogicky sa to dá ukázať pre  $x_1$ .

Myšlienku odvodu pre  $\mathbb{R}^2$  je z [http://en.wikipedia.org/wiki/Cramer's\\_rule](http://en.wikipedia.org/wiki/Cramer's_rule).

**Poznámka** (Geometrická interpretácia Cramerovho pravidla na  $\mathbb{R}^3$ ). Postupujeme analogicky. Majme sústavu

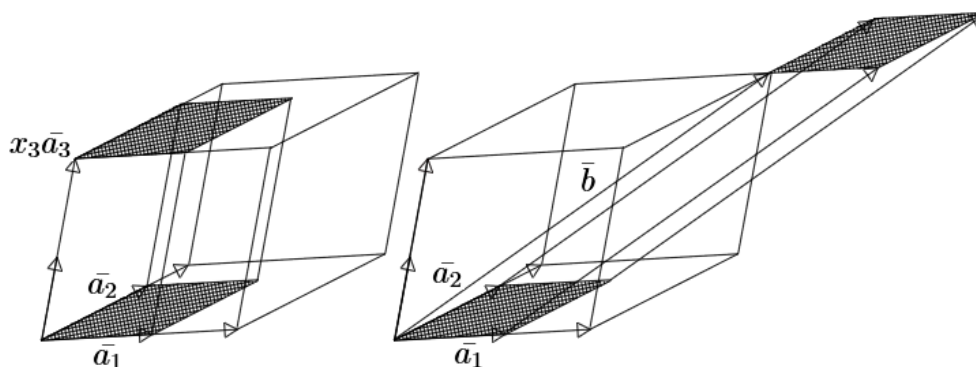
$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

alebo píšeme

$$x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + x_3 \bar{a}_3 = \bar{b}.$$

Z vektorov  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  a  $\bar{a}_3$  nám vznikne rovnobežnost. Takýto hranol má objem rovný determinantu

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$



Obr. 8: Geometrická interpretácia Cramerovho pravidla na  $\mathbb{R}^3$

Z Cavalieriho princípu, vyplýva rovnosť rovnobežnostenou na obrázku 8. a z toho vyplýva rovnosť determinantov

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & x_3 a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & x_3 a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & x_3 a_{33} \end{pmatrix} = x_3 \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Znova sa dá jednoducho vyjadriť

$$x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}$$

a obdobne je to možné ukázať pre  $x_1$  a  $x_2$ .

### 3 Určovanie polohy prijímača

Máme dva základné spôsoby merania vzdialeností pri určovaní polohy: fázové a kódové. Pri fázovom meraní využívame frekvencie elektromagnetického vlnenia posiadaného signálu zo satelitu. Pri kódovom meraní používame nameranú dobu šírenia elektromagnetického vlnenia zo satelitu. V ďalšom texte budeme hovoriť o druhej metóde, ktorá je známa ako dĺžkomerná metóda. Presnejšie rozdelenie určovania polohy sa nachádza napríklad v literatúre [2].

#### 3.1 Teoretický výpočet pozície

Pozíciu budeme počítať pomocou dĺžkomernej metódy, ktorú používa systém GPS. V tejto metóde využívame výpočet vzdialenosti medzi satelitom a prijímačom, prostredníctvom známej rýchlosti signálu  $c$  a dobu letu  $\tau$ . Preto môžeme využiť vzorec pre určenie vzdialenosti  $r = c\tau$ .

Nech  $[x, y, z]$  je pozícia prijímača a  $[a, b, c]$  pozícia satelitu. Potom pre vzdialenosť platí rovnica

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 = c^2\tau^2.$$

Ak zistíme vzdialenosť len od určitého satelitu, množinou riešení bude guľový povrch. Pri dvoch satelitoch máme dve možné riešenia. Riešením je buď kružnica alebo jeden bod, prázdnu množinu bodov neuvažujeme (minimálne jedným je bod prijímača). Jeden bod je riešením ak dva satelity s prijímačom ležia na jednej priamke. Ak teraz neuvažujeme túto jedinečnú situáciu, dostaneme vždy nekonečnú množinu riešení. Pridaním tretieho satelitu získame už konečnú množinu riešení. Špeciálnym prípadom bude opäť jeden bod, kde dva satelity s prijímačom budú ležať na jednej priamke. Všeobecným prípadom budú dva body, kde kružnicu (riešenie dvoch satelitov) pretne guľový povrch v dvoch bodoch.

Preto ďalej uvažujeme 3 satelity - 3 rovnice (kde satelit  $i$  má pozíciu  $[a_i, b_i, c_i]$ ):

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2 = c^2\tau_1^2 \quad (i)$$

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2 = c^2\tau_2^2 \quad (ii)$$

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2 = c^2\tau_3^2 \quad (iii)$$

Tieto kvadratické rovnice upravujeme tak, aby sme na jednej strane mali neznáme  $x, y$  a  $z$ . Jednotlivo odčítame tretiu rovnicu od prvej  $((i) - (iii))$  a druhej  $((ii) - (iii))$  a dostaneme

$$2(a_3 - a_1)x + 2(b_3 - b_1)y + 2(c_3 - c_1)z = c^2(\tau_1^2 - \tau_3^2) + (a_3^2 - a_1^2) + (b_3^2 - b_1^2) + (c_3^2 - c_1^2)$$

$$2(a_3 - a_2)x + 2(b_3 - b_2)y + 2(c_3 - c_2)z = c^2(\tau_2^2 - \tau_3^2) + (a_3^2 - a_2^2) + (b_3^2 - b_2^2) + (c_3^2 - c_2^2),$$

odkiaľ  $\lambda_i$  vyjadríme ako

$$\lambda_1 = c^2(\tau_1^2 - \tau_3^2) + (a_3^2 - a_1^2) + (b_3^2 - b_1^2) + (c_3^2 - c_1^2)$$

$$\lambda_2 = c^2(\tau_2^2 - \tau_3^2) + (a_3^2 - a_2^2) + (b_3^2 - b_2^2) + (c_3^2 - c_2^2).$$

$\lambda_1$  a  $\lambda_2$  sú v podstate konštanty, so známymi hodnotami  $(a, b, c, \tau)$ . Táto náhrada nám sprehľadňuje ďalší výpočet.

Pri výpočte neznámych použijeme Cramerovo pravidlo. Na aplikovanie tohto pravidla, nutne potrebujeme, aby aspoň jeden determinant matice z vyššie uvedených rovníc bol nenulový

$$\begin{pmatrix} a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \\ a_3 - a_2 & b_3 - b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 - a_1 & c_3 - c_1 \\ a_3 - a_2 & c_3 - c_2 \end{pmatrix} \text{ alebo } \begin{pmatrix} b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \\ b_3 - b_2 & c_3 - c_2 \end{pmatrix}.$$

Ak by všetky tri matice mali nulový determinant, znamenalo by to, že vektorový súčin vektorov  $\vec{k} = (a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1)$  a  $\vec{l} = (a_3 - a_2, b_3 - b_2, c_3 - c_2)$  je nulový vektor. Takže ak by sme mali dostať nulový vektor z vektorového súčinu, znamenalo by to, buď splnenú podmienku  $|\vec{k}| = 0 \vee |\vec{l}| = 0$  alebo  $\alpha = 0 \vee \alpha = \pi$  (vektory sú kolineárne). Prvá podmienka neprichádza do úvahy a z druhej by vyplývalo, že všetky tri body-satelity ležia na jednej priamke, čo nie je možné. Možeme to vyvrátiť kontrapríkladom, že neexistuje priamka prechádzajúca guľovým povrchom (plocha dráh satelitov) a má s týmto povrchom 3 prieniky. Preto aspoň jedna z troch matíc má determinant nenulový a môžeme pokračovať ďalej v riešení. Uvažujme príklad, že druhá matica má nenulový determinant. Potom môžeme vyjadriť  $x$  a  $y$  v závislosti na  $z$  ako

$$x(z) = \frac{\det \begin{pmatrix} \lambda_1 - 2(b_3 - b_1)z & 2(c_3 - c_1) \\ \lambda_2 - 2(b_3 - b_2)z & 2(c_3 - c_2) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(c_3 - c_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(c_3 - c_2) \end{pmatrix}}$$

$$y(z) = \frac{\det \begin{pmatrix} 2(a_3 - a_1) & \lambda_1 - 2(b_3 - b_1)z \\ 2(a_3 - a_2) & \lambda_2 - 2(b_3 - b_2)z \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(c_3 - c_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(c_3 - c_2) \end{pmatrix}}.$$

Môžeme si všimnúť, že z determinantu v čitateli nám vyjde polynóm maximálne prvého stupňa a v menovateli nenulové reálne číslo. Parametrické riešenia  $x(z)$  a  $y(z)$  sú preto polynómy maximálne prvého stupňa a ak teraz dosadíme  $x(z)$  a  $y(z)$  do tretej kvadratickej rovnice

$$(x(z) - a_3)^2 + (y(z) - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2 = c^2 \tau_3^2,$$

dostaneme opäť kvadratickú rovnicu. Preto z nej dostaneme maximálne dve riešenia  $z_1$  a  $z_2$ , celkovým výsledkom budú dva body  $[x, y, z_1]$  a  $[x, y, z_2]$ . Jeden z týchto bodov sa bude nachádzať približne na povrchu Zeme a to bude naše správne riešenie.

Kapitolu sme spracovali z [7].

## 3.2 Výpočet v praxi

V praxi sa musí samozrejme počítať s rôznymi nepresnosťami. Napríklad nepresné meranie času (úplne presne ani v praxi nie je možné) alebo nestála rýchlosť signálu, ktorú sme považovali vo výpočte za konštantnú. Preto potrebujeme k výpočtu pozície určiť aj korekcie k určitým nežiadúcim faktorom. Tým sa nám spresňuje konečné riešenie.

Základný výpočet vzdialenosti  $P_i^k$  medzi  $i$ -tym prijímačom a  $k$ -tym satelitom s korekciami je vzťah

$$P_i^k = \rho_i^k + c(dt_i + dt^k) + \Delta_{\text{trop}_i}^k + \Delta_{\text{iono}_i}^k + e_i^k,$$

kde

- $\rho_i^k$  - geometrická vzdialenosť vypočítaná teoreticky
- $dt_i$  - časová odchýlka spôsobená meraním v prijímači
- $dt^k$  - časová odchýlka spôsobená meraním v satelite
- $\Delta_{\text{trop}_i}^k$  - korekčná vzdialenosť spôsobená znížením rýchlosti signálu v troposfére



- $\Delta_{iono_i}^k$  - korekčná vzdialenosť spôsobená znížením rýchlosti signálu v ionosfére
- $e_i^k$  - chybová vzdialenosť spôsobená inými chybovými faktormi.

Uved'me si teraz celý proces prenosu informácie zo satelitu do prijímača s nežiadúcimi vplyvmi. Satelit pošle v správe, medzi inými informáciami, aj informáciu o čase vyslania správy. Satelit určí tento čas vyslania s chybou  $dt^k$ . Signál prechádza ionosférou a troposférou, kde je signál vplyvom častíc v týchto vrstvách brzdený. Tým sa teda predlžuje doba prenosu signálu, čo je v prepočte na dĺžku, korekcia  $\Delta_{iono_i}^k$  a  $\Delta_{trop_i}^k$ . Nakoniec prijímač určí čas prijatia správy s chybou  $dt_i$ . Táto chyba je konštantná pre jedno meranie k všetkým satelitom, pretože prijímač signály z rôznych satelitov vyhodnocuje súčasne.

Ďalej sa o týchto chybách rozpišem v ďalších podkapitolách.

### 3.2.1 Základný výpočet s časovou odchýlkou $\tau_{od}$

Na presné meranie času používame atómové hodiny, ktoré sú priveľmi drahé a preto sú uložené len v satelite. Časová chyba  $dt^k$  satelitu je preto približne  $10^3$ -krát menšia ako časová chyba v prijímači  $dt_i$ .

Keďže odchýlka  $dt_i$  prijímača je konštantná pre jedno meranie a odchýlka  $dt^k$  veľmi malá. Môžeme nahradiť tieto dve odchýlky odchýlkou  $\tau_{od} = dt_i + dt^k$ , ktorú preto môžeme považovať približne za konštantu. Ak do nášho teoretického výpočtu pridáme aj odchýlku  $\tau_{od}$  ako štvrtú neznámu, budeme mať štyri neznáme na tri rovnice - satelity. Aby sme prišli ku konečnému počtu riešení, potrebujeme štvrtú rovnicu a teda aj signál zo štvrtého satelitu.

Pre tento prípad máme sústavu rovníc

$$\begin{aligned}(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 &= r_1^2 = c^2(T_1 - \tau_{od})^2 \\(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 &= r_2^2 = c^2(T_2 - \tau_{od})^2 \\(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 &= r_3^2 = c^2(T_3 - \tau_{od})^2 \\(x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 + (z - c_4)^2 &= r_4^2 = c^2(T_4 - \tau_{od})^2\end{aligned}$$

Tieto kvadratické rovnice upravujeme analogicky tak, ako sme ich upravovali v predošlej kapitole. Samostatne štvrtú rovnicu odčítame od prvej, druhej a tretej a dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}2(a_4 - a_1)x + 2(b_4 - b_1)y + 2(c_4 - c_1)z &= 2c^2\tau_{od}(T_4 - T_1) + \beta_1 \\2(a_4 - a_2)x + 2(b_4 - b_2)y + 2(c_4 - c_2)z &= 2c^2\tau_{od}(T_4 - T_2) + \beta_2 \\2(a_4 - a_3)x + 2(b_4 - b_3)y + 2(c_4 - c_3)z &= 2c^2\tau_{od}(T_4 - T_3) + \beta_3 \\(x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 + (z - c_4)^2 &= r_4^2 = c^2(T_4 - \tau_{od})^2,\end{aligned}$$

kde konštanty  $\beta_i$  su vyjadrené

$$\begin{aligned}\beta_1 &= c^2(T_1^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_1^2) + (b_4^2 - b_1^2) + (c_4^2 - c_1^2) \\ \beta_2 &= c^2(T_2^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_2^2) + (b_4^2 - b_2^2) + (c_4^2 - c_2^2) \\ \beta_3 &= c^2(T_3^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_3^2) + (b_4^2 - b_3^2) + (c_4^2 - c_3^2).\end{aligned}$$

Analogicky ako vo vyššie uvedenej kapitole, použijeme Cramerovo pravidlo. Teda potrebujeme nenulový menovateľ, aby sme splnili podmienku  $(\det A)^{-1} \in \mathbb{R}$  z definície Cramerovho pravidla. Determinant matice

$$\begin{pmatrix} a_4 - a_1 & b_4 - b_1 & c_4 - c_1 \\ a_4 - a_2 & b_4 - b_2 & c_4 - c_2 \\ a_4 - a_3 & b_4 - b_3 & c_4 - c_3 \end{pmatrix}$$

je nulový, len ak sú vektory  $(a_4 - a_1, b_4 - b_1, c_4 - c_1)$ ,  $(a_4 - a_2, b_4 - b_2, c_4 - c_2)$  a  $(a_4 - a_3, b_4 - b_3, c_4 - c_3)$  závislé. Tieto vektory vyjadrujú vektor z  $i$ -teho satelitu do štvrtého. Všeobecne teda vyjadrujú objem rovnobežnostena, a ten má objem nulový, len ak všetky vrcholy ležia na jednej rovine. Neuvažujme nereálnu situáciu, že všetky štyri satelity ležia na jednej priamke. V rovine satelitov s prienikom guľového povrchu (plocha obežných dráh) je kružnica jediným reálnym riešením nulového determinantu. Satelitný systém bol ale navrhnutý tak, aby žiadne štyri satelity neboli súčasne zachytávané jedným prijímačom na Zemi a zároveň ležali na jednej rovine.

Následne tak ako v predošlej kapitole, vyjadríme pomocou Cramerovho pravidla  $x$ ,  $y$  a  $z$  ako funkcie odchýlky  $\tau_{od}$

$$x(\tau_{od}) = \frac{\det \begin{pmatrix} 2c^2\tau_{od}(T_4 - T_1) + \beta_1 & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - b_1) \\ 2c^2\tau_{od}(T_4 - T_2) + \beta_2 & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - b_2) \\ 2c^2\tau_{od}(T_4 - T_3) + \beta_3 & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - b_3) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{pmatrix}}$$

$$y(\tau_{od}) = \frac{\det \begin{pmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2c^2\tau_{od}(T_4 - T_1) + \beta_1 & 2(c_4 - b_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2c^2\tau_{od}(T_4 - T_2) + \beta_2 & 2(c_4 - b_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2c^2\tau_{od}(T_4 - T_3) + \beta_3 & 2(c_4 - b_3) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{pmatrix}}$$

$$z(\tau_{od}) = \frac{\det \begin{pmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2c^2\tau_{od}(T_4 - T_1) + \beta_1 \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2c^2\tau_{od}(T_4 - T_2) + \beta_2 \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2c^2\tau_{od}(T_4 - T_3) + \beta_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{pmatrix}}$$

ktoré dosadíme do štvrtej kvadratickej rovnice a dostaneme rovnicu s jedinou neznámou  $\tau_{od}$

$$(x(\tau_{od}) - a_4)^2 + (y(\tau_{od}) - b_4)^2 + (z(\tau_{od}) - c_4)^2 = r_4^2 = c^2(T_4 - \tau_{od})^2.$$

Analogicky zisťujeme, že  $x(\tau_{od})$ ,  $y(\tau_{od})$  a  $z(\tau_{od})$  sú maximálne lineárne polynómy a preto bude táto rovnica maximálne kvadratická. Preto všeobecne uvažujme dve riešenia  $\tau_{od_1}$  a  $\tau_{od_2}$ . Dosadením dvoch riešení získame dva body  $[x_1, y_1, z_1]$  a  $[x_2, y_2, z_2]$ , ale len jeden sa bude nachádzať približne na povrchu Zeme. To je pozícia nášho prijímača.

Podkapitola je spracovaná z [7].

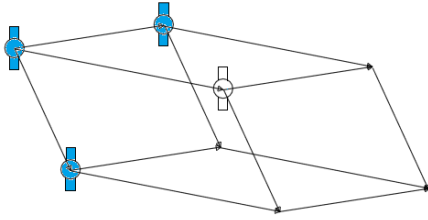
## Správny výber 4 satelitov

Vzniká problém, ak máme dostupné viac ako 4 satelity. Musíme vybrať tie ktoré nám možné miesto prijímača zredukujú na minimum. Ak vyberieme dva satelity, ktoré sú blízko seba, vytvoria väčšiu chybu. Pretože zo základov numerických metód vieme, že menší deliteľ (blížiaci sa k nule) vytvorí väčšiu chybu. Podľa nášho priameho výpočtu

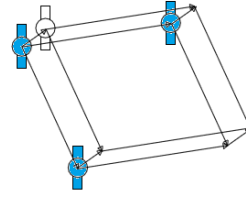
prostredníctvom Cramerového pravidla na spresnenie výpočtu potrebujeme čo najväčší determinant matice

$$\begin{pmatrix} a_4 - a_1 & b_4 - b_1 & c_4 - c_1 \\ a_4 - a_2 & b_4 - b_2 & c_4 - c_2 \\ a_4 - a_3 & b_4 - b_3 & c_4 - c_3 \end{pmatrix}.$$

Hodnota tohoto determinantu je objem rovnobežnostena, ktorý má vrcholy v štyroch bodoch satelitov. To znamená, že objem sa zníži ak sa dva satelity nachádzajú vo vzájomnej blízkosti. Na obrázku 9. a 10. môžeme vidieť rozdiely veľkosti determinantov pri rovnakom rozložení troch satelitov (vyznačených farebne) a štvrtého satelitu, ktorý zmenil pozíciu. V dnešnej dobe sú prijímače 8 až 12 kanálové, takže sú schopné prijímať viacero signálov



Obr. 9: Satelity sú vzdialené od seba



Obr. 10: Dva satelity sú vo vzájomnej blízkosti

naraz. Potom sa už jedná o preurčenú sústavu. Napríklad z 8 prijatých signálov získame 8 kvadratických rovníc o 4 neznámych. Takáto sústava sa rieši pomocou numerických metód, najčastejšie Metódou najmenších štvorcov.

### 3.2.2 Vplyv atmosféry

Pre refrakciu elektromagnetického vlnenia prechodom atmosférou sa signál nešíri po najkratšej možnej dráhe  $s_0$  (priama spojnica). Signál sa preto šíri medzi dvoma bodmi v atmosfére po krivke ktorú môžeme vyjadriť vzťahom [9]

$$s = \int n \, ds,$$

kde  $n$  vyjadruje index lomu pozdĺž dráhy signálu. Index lomu je vyjadrený vzťahom  $n = \frac{c}{v}$ , kde  $c$  je rýchlosť svetla vo vákuu a  $v$  je rýchlosť svetla v danom prostredí. Pre  $n$  samozrejme platí  $n \geq 1$ .

Potom korekciu dráhy signálu atmosférou môžeme vyjadriť rozdielom dĺžky skutočnej dráhy  $s$  a geometrickej spojnice  $s_0$  [9]

$$\Delta_{\text{atm}} = s - s_0 = \int n \, ds - \int ds.$$

Z pohľadu refrakcie môžeme rozdeliť atmosféru na ionosféru a troposféru. Celá táto podkapitola je spracovaná z literatúry [9].

### Troposférická refrakcia

Troposférická refrakcia vyjadruje prevažne vplyv neutrálnej atmosféry. Zavedieme veličinu refraktivita  $N^{\text{trop}}$ , ktorá závisí na tlaku, teplote a vlhkosti atmosféry  $v$ . Pre korekciu

satelitu v zenite platí vzťah [9]

$$\Delta_{\text{trop}} = 10^{-6} \int N^{\text{trop}}(p, t, v) ds.$$

Vzťahy sú odvodené empiricky. Troposférická korekcia je taktiež veľmi závislá na zemepisnej šírke, ročnom období a aktuálnom počasí.

### Ionosférická refrakcia

V ionosfére je refrakcia spôsobená voľnými časticami (elektróny, ióny). Preto je refrakcia závislá na elektrónovej hustote  $N_e$  v danom mieste. Aby sme mali hodnotu elektrónovej hustoty vyjadrenú pre celú dráhu pod zenitovým uhlom  $z = 90^\circ$  vyjadríme novú veličinu  $\text{TEC}^2$  zavedenú  $\text{TEC} = \int N_e ds$ . Jednotku má TEC unit  $\Rightarrow$  TECU,  $1 \text{ TECU} = 10^{-16}$  elektrónov/ $m^2$ . Pre kódové meranie z družice pozorovanej pod zenitovým uhlom  $z$  platí vzťah [9]

$$\Delta_{\text{ion}}(z') = \frac{\text{TEC}}{\cos(z')} \frac{40,3}{f^2},$$

kde

$$z' = \frac{R}{R + h_{\text{ion}}} \sin(z).$$

$R$  je stredný polomer Zeme,  $h_{\text{ion}}$  je stredná výška ionosféry a  $f$  je frekvencia elektromagnetického vlnenia. Hodnota korekcie  $\Delta_{\text{ion}}$  je závislá na veľkosti uhla  $z'$  pod ktorým sa dostáva do ionosféry na stredne výške ionosféry.

Presnosť výpočtu korekcie  $\Delta_{\text{ion}}$  je závislá hlavne na veličina TEC, ktorá je v praxi odhadovaná. TEC sa mení podľa ročného obdobia, zemepisnej šírky alebo dňa a noci. Slnéne žiarenie naráža na neutrálne atómy a vytvára ióny. Preto je najväčšia hodnota TEC tesne po poludní a najmenšia hodnota pred svitaním.

### 3.2.3 Vplyv relativistického efektu

Podkapitola spracovaná z literatúry [9].

Základné postuláty špeciálnej teorie relativity [9]:

1. Fyzikálne zákony majú rovnaký tvar vo všetkých inerciálnych sústavách. Pre popis fyzikálnych javov sú všetky tieto sústavy ekvivalentné.
2. Rýchlosť šírenia elektromagnetického žiarenia je rovnaká vo všetkých inerciálnych sústavách a nezávisí na pohybe zdroja a smeru šírenia.

Majme štvorrozmerné systémy  $S(x, y, z, t)$  a  $S'(x', y', z', t')$  potom platí [9]

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (c\tau)^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= (c\tau')^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

H. A. Lorenz vyšiel z klasickej Galileovej transformácie ( $x' = x - vt$ ,  $t' = t$ ), kde dodal koeficient  $k$  takto:

$$x = k(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z'$$

---

<sup>2</sup> TEC - Total Electron Content

$$x' = k(x + vt), \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Dosadením týchto hodnôt do rovnice (3.1) dostávame koeficient:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.2)$$

Neskôr bolo dokázané, že dôsledkom Lorentzovej transformácie sú [9]:

◦ dilatácia času

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

◦ kontrakcia dĺžok

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

◦ dopplerovský efekt

$$\Delta f' = \frac{\Delta f}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Vplyv relativistického efektu je príliš malý, oproti ostatným už zmieneným korekciám, okrem dopplerovho efektu. Dopplerov efekt vzniká rýchlosťou družice a satelitu a rozdielom gravitačného potenciálu na povrchu Zeme a na obežnej dráhe. Vplyv tohoto efektu sa opravuje znížením základnej frekvencie družicových hodín. [9]

## 4 Prijímač v súradnicovom systéme

### 4.1 Úvod do problematiky

V prvej polovici 18. storočia sa geodetickými (stupňovitými) meraniami podarilo dokázať Newtonovu teóriu o sploštenom tvare Zeme na pólach. Tým pre geodetov nastala úloha nájsť taký model Zeme, ktorý by mal jednoduchý analytický tvar a zároveň najlepšie vystihoval tvar Zeme.

Pri formovaní tvaru našej planéty primárne pôsobili dve sily. A to gravitačná sila  $\bar{F}_g$  a odstrediva sila  $\bar{F}_{od}$ . Súčtom týchto dvoch vektorových veličín dostávame znova vektorovú veličinu, ktorú nazývame tiažova sila  $\bar{G}$ . Uzavretú plochu, ktorá je vo všetkých bodoch kolmá k tiaži budeme nazývať *hladinová plocha*. Pre lepšiu predstavu, vrstevnice na mapách vznikli prienikom skutočného povrchu a hladinových plôch v určitých výškach. Pre teleso s hladinovou plochou vo výške nula v roku 1872 Johann B. Listing prvýkrát zavádza pojem *Geoid*. Pre lepšiu predstavu, keby povrch Zeme tvorila hladina vody, myslíme aj pod pevninou, vznikol by veľmi približný tvar geoidu. Avšak nepravidelnosť tvaru geoidu je spôsobená nehomogénnym rozložením hmoty v zemskej kôre, preto nám komplikuje analytické vyjadrenie. M.S. Molodenskij prišiel v roku 1945 s novou teóriou, ktorá uvažovala s meraniami len na fyzickom povrchu Zeme. A preto predmetom určenia neuvažoval geoid, ale všeobecnú plochu, ktorá nie je plochou hladinovou a bola nazvaná *kvázigeoid*. Odchýlka od geoidu nepresahuje 2m po celom povrchu kvázigeoidu, na hladine mora sa stotožňujú. Odstavec z literatúry [10].



Obr. 11: Schéma priebehu kvázigeoidu vzhľadom k referenčnému systému WGS - 84. [1]

V minulosti boli vytvorené rôzne rotačné elipsoidy, ktoré najlepšie modelovali danú oblasť. Preto neboli ani ujednotené stredy týchto elipsoidov, ani veľkosti poloosí.

Teraz doplníme údaje o najpoužívanejších referenčných elipsoidoch.

| elipsoid    | $a[m]$        | $i[-]$        |
|-------------|---------------|---------------|
| GRS-80      | 6378137,0     | 298,257222101 |
| Besselov    | 6377397,15508 | 299,152812853 |
| Krasovskeho | 6378245,0     | 298,3         |
| Hayfordov   | 6378388,0     | 297,0         |

Ak chceme prepočítavať polohy vzhľadom k rôznym referenčným elipsoidom, musíme využiť transformáciu.

## 4.2 Translácia a rotácia lokálnej sústavy

Budeme vyjadrovať lokálny polohový vektor  $\bar{r}^* = (r_x^*, r_y^*, r_z^*)$  v  $x^*$ ,  $y^*$  a  $z^*$  z polohového vektora  $\bar{r} = (r_x, r_y, r_z)$  v  $x$ ,  $y$  a  $z$  v rovnakom bode. Začneme zložitejším a tým je rotácia. Uhol  $\psi_z$  vyjadruje uhol otočenia okolo osi  $z$ , uhol je kladný v smere otáčania hodinových ručičiek z pohľadu v kladnom smere osi  $z$ . Rotáciu okolo jednej osi  $\mathbf{R}(\psi_z)$  môžeme odvodiť z valcových súradníc, ktoré sú v tvare:

$$\begin{aligned} r_x^* &= r_x \cdot \cos \psi_z - r_y \cdot \sin \psi_z \\ r_y^* &= r_x \cdot \sin \psi_z + r_y \cdot \cos \psi_z \\ r_z^* &= r_z \end{aligned}$$

Tento zápis je ekvivalentný so zápisom:

$$\begin{pmatrix} r_x^* \\ r_y^* \\ r_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi_z & -\sin \psi_z & 0 \\ \sin \psi_z & \cos \psi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}.$$

Preto transformácia prostredníctvom rotačnej matice ( $\bar{r}^* = \mathbf{R}(\psi_z) \cdot \bar{r}$ ) je takáto:

$$\mathbf{R}(\psi_z) = \begin{pmatrix} \cos \psi_z & -\sin \psi_z & 0 \\ \sin \psi_z & \cos \psi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogicky vieme potom vyjadriť maticu rotácie aj pre uhly otočenia  $\psi_x$  a  $\psi_y$ .

$$\mathbf{R}(\psi_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_x & \sin \psi_x \\ 0 & -\sin \psi_x & \cos \psi_x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\psi_y) = \begin{pmatrix} \cos \psi_y & 0 & -\sin \psi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_y & 0 & \cos \psi_y \end{pmatrix}$$

Potom všeobecná rotácia je vyjadrená takto

$$\bar{r}^* = \mathbf{R}(\psi_x, \psi_y, \psi_z) \cdot \bar{r} = \mathbf{R}(\psi_x) \mathbf{R}(\psi_y) \mathbf{R}(\psi_z) \cdot \bar{r}$$

potom rotačná matica  $\mathbf{R}(\psi_x, \psi_y, \psi_z)$  má tvar

$$\begin{pmatrix} \cos \psi_y \cos \psi_z & \cos \psi_y \sin \psi_z & -\sin \psi_y \\ \sin \psi_x \sin \psi_y \cos \psi_z - \cos \psi_x \sin \psi_z & \sin \psi_x \sin \psi_y \sin \psi_z + \cos \psi_x \cos \psi_z & \sin \psi_x \cos \psi_y \\ \cos \psi_z \sin \psi_y \cos \psi_x + \sin \psi_x \sin \psi_z & \cos \psi_x \sin \psi_y \sin \psi_z - \sin \psi_x \cos \psi_z & \cos \psi_x \cos \psi_y \end{pmatrix}.$$

Pre malé uhly môžeme túto rotačnú maticu linearizovať podľa nasledujúcich pravidiel:

$$\sin \psi_x \approx \psi_x$$

$$\cos \psi_x \approx 1$$

$$\sin \psi_x \cdot \sin \psi_x \approx \psi_x \cdot \psi_x \approx 0.$$

Potom dostávame linearizovanú rotačnú maticu

$$\mathbf{R}(\psi_x, \psi_y, \psi_z) = \begin{pmatrix} 1 & \psi_z & -\psi_y \\ -\psi_z & 1 & \psi_x \\ \psi_y & -\psi_x & 1 \end{pmatrix}.$$

Transláciu reprezentujeme vektorom  $\bar{r}^0$ , ktorý vyjadruje posunutie počiatku lokálnej sústavy vzhľadom k počiatku základnej sústavy. Potom transformáciu vektora  $\bar{r}$  v lokálnej sústave k základnej, zapíšeme takto  $\bar{r}^* = \bar{r}^0 + \bar{r}$ . So súčasnou rotáciou transformáciu zapíšeme

$$\bar{r}^* = \bar{r}^0 + (1 + m)\mathbf{R}(\psi_x, \psi_y, \psi_z)\bar{r}$$

a maticovo

$$\begin{pmatrix} r_x^* \\ r_y^* \\ r_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x^0 \\ r_y^0 \\ r_z^0 \end{pmatrix} + (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & \psi_z & -\psi_y \\ -\psi_z & 1 & \psi_x \\ \psi_y & -\psi_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix},$$

kde  $m$  je koeficient mierky, ktorý vyjadruje zmenu dĺžkovej mierky pri transformácii sústav.

### 4.3 Zavedenie systému WGS 84

V dnešnej dobe a hlavne na základe družicových meraní vytvorilo ministerstvo obrany U.S.A. systém WGS - 84<sup>3</sup> pre potreby GPS.

Uvažujme 3-rozmerný pravotočivý karteziánsky systém súradníc. Zadefinujeme polohu prijímača voči báze priestoru nasledovne [6]:

- stred systému je v ťažisku Zeme
- os  $z$  smeruje do referenčného pólu IERS<sup>4</sup>
- os  $x$  je priesečnicou referenčného nultého poludníka IERS a roviny kolmej k osi  $z$  a prechádzajúcej počiatkom sústavy
- os  $y$  je priesečnicou poludníkovej roviny 90° IERS a roviny kolmej k osi  $z$  a prechádzajúcej počiatkom sústavy

<sup>3</sup>WGS-84 - (World Geodetic System 1984) je geodetický geocentrický systém armády USA, v ktorom pracuje globálny systém určovania polohy GPS a ktorý je zároveň štandardizovaným geodetickým systémom armád NATO [1].



Takýto systém budeme volať súradnicový systém WGS 84. Pre základné úlohy vyššej geodézie tvar Zeme najlepšie aproximuje rotačný elipsoid, ktorého analytické vyjadrenie podstatne zjednodušuje výpočty. Preto je referenčný elipsoid WGS 84 zavedený takto [6]:

- stred elipsoidu je totožný so stredom nášho pravotočivého systému
- referenčný nultý poludník prechádza Greenwichom

Teraz uvidíme niektoré parametre referenčného systému WGS 84.

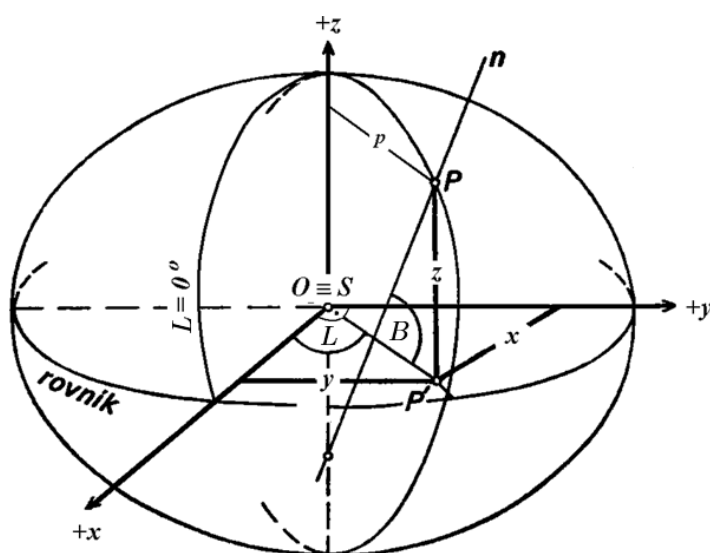
| parameter, konštanta              | označenie           | hodnota  |
|-----------------------------------|---------------------|--|
| Hlavná poloos                     | a                   | 6378137,0 m                                    |
| Vedľajšia poloos                  | b                   | 6356752,314 m                                  |
| Sploštenie                        | $i = \frac{a-b}{a}$ | 298,257223563                                  |
| Uhlová rýchlosť                   | $\omega_e$          | $7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad/s}$         |
| Geocentrická gravitačná konštanta | GM                  | $23986004,418 \cdot 10^8 \text{ m}^3/\text{s}$ |

Ak chceme jednoznačne vyjadriť pozíciu  $[x_e, y_e, z_e]$  na našom modeli vzhľadom k bázi priestoru, potrebujeme rovnicu ktorá vyjadruje tento model. Rovnica rotačného elipsoidu k našej báze je vyjadrená takto:

$$\frac{x_e^2}{a^2} + \frac{y_e^2}{a^2} + \frac{z_e^2}{b^2} = 1.$$

Našou úlohou teraz bude určiť súradnice, podľa ktorých sa osoba využívajúca prijímač orientuje na Zemi.

#### 4.4 Geodetické zemepisné súradnice



Obr. 12: Schéma priebehu kvázigeoidu vzťahujúceho k referenčnému systému WGS - 84. [1]

<sup>4</sup> IERS - International Earth Rotation Service

Zemepisné súradnice:

- $B$  : zemepisná geodetická šírka
  - uhol zvieraný medzi ekliptikou a normálou k ploche elipsoidu
- $L$  : zemepisná geodetická dĺžka
  - uhol zvieraný rovinou miestneho a Greenwichského poludníka
- $H$  : elipsoidická výška
  - vzdialenosť od elipsy, zobraená po normále

Vzťahy pravouhlých súradníc k zemepisným [10]:

$$\begin{aligned}x &= (N + H) \cos B \cos L \\y &= (N + H) \cos B \sin L \\z &= ((1 - e^2)N + H) \sin B,\end{aligned}$$

kde  $e$  je excentricita elipsoidu a  $N$  pričný polomer krivosti

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}.$$

Spätne teraz môžeme vypočítať zemepisné súradnice priamo cez vyriešenie bikvadratickej rovnice alebo iteračne, takto [1]

$$\cos L = \frac{x}{p}, \quad \sin L = \frac{y}{p} \Rightarrow \tan L = \frac{\sin L}{\cos L} = \frac{y}{x} \Rightarrow L = \arctan \frac{y}{x},$$

kde nahradíme  $p = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Počiatkové hodnoty

$$B_0 = \arctan \frac{z}{(1 - e^2)p}, \quad N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}}, \quad H_0 = 0.$$

Podľa potrebnej presnosti postupne iterujeme:

$$\begin{aligned}B_{n+1} &= \arctan \frac{z}{p(1 - e^2 \frac{N_n}{N_n + H_n})}, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots \\N_{n+1} &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_{n+1}}}, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots \\H_{n+1} &= \frac{p}{\cos B_{n+1}} - N_{n+1}, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned} \tag{4.1}$$

Treba si uvedomiť rozdiel medzi  $H$  a nadmorskou výškou. Nadmorská výška je výška nad kvázigeoidom.

Elipsoidickú výšku  $H$  môžeme vyjadriť pomocou normálnej Molodenského výšky [1]

$$H = H_Q + \zeta, \tag{4.2}$$

kde  $H_Q$  je normálna Molodenského výška a  $\zeta$  prevýšenie kvázigeoidu nad elipsoidom. Ak teda chceme vypočítať nadmorskú výšku v určitom bode, musíme pre dané súradnice bodu zistiť prevýšenie  $\zeta$  kvázigeoidu nad elipsoidom. Máme viacero možností ako túto hodnotu aproximovať. Môžeme použiť interpolačný vzťah v literatúre [2], z najnovších dát z modelu CR-2005 vytvoreného VÚGTK<sup>5</sup> alebo pomocou interpolácie nameraných bodov z databázy Bodových polí z webových stránok <http://bodovapole.cuzk.cz/>.

<sup>5</sup> VÚGTK - Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický, v. v. i.

## 5 Výpočty s reálnymi hodnotami prijímača GPS

Hodnoty ktoré nám boli poskytnuté, leteckým ústavom FSI VUT, boli namerané prijímačom (Rx Ashtech Promark 3 - GPS/EGNOS Receiver) zo strechy budovy A1 na FSI VUT dňa 20.10.2010.

Dokument obsahoval zapísané hodnoty v intervale 2001s a každú sekundu prijímač vypísal všetky data zachytených satelitov. Údaje sme prekontrolovali a zistili, že počas celého časového intervalu bolo zachytených práve 9 rovnakých satelitov. Táto informácia nám mierne zjednodušila kód pri spracovaní údajov. Obsahom dokumentu boli aj hodnoty vypočítané prijímačom, ako rôzne korekcie a pod. Taktiež nám boli poskytnuté údaje pozície prijímača pri meraní

$$\begin{aligned}B &= 49.224107325^\circ \\L &= 16.57721407778^\circ \\H &= 406.482\text{ m}.\end{aligned}$$

### 5.1 Výpočet pozície prijímača

Aby sme vypočítané hodnoty mohol porovnať so skutočnými, prepočítame si skutočnú pozíciu do systému pravouhlých súradníc WGS8-4, v ktorej máme ostatné hodnoty. Postup prepočtu je uvedený v tomto dokumente v kapitole o zemepisných súradniciach. Uvedieme jednoduchý zdrojový kód prepočtu v Matlabe.

```
format long
b=49.224107325;
B=(b/180)*pi;
l=16.57721407778;
L=(l/180)*pi;
H=406.482;
a=6378137;
b=6356752.31425;

e=sqrt((a^2-b^2)/a^2);
N=a/sqrt(1-e^2*(sin(B))^2);

X=(N+H)*cos(B)*cos(L);
Y=(N+H)*cos(B)*sin(L);
Z=(N*(1-e^2)+H)*sin(B);
```

Výstup Matlabu:

```
X = 4.000376769701590e+06
Y = 1.190832022152060e+06
Z = 4.807180959242958e+06
```

V nasledujúcej tabuľke ukážeme len veľmi malú časť údajov nameraných z prvej sekundy.

| č.sat. | $x[m]$          | $y[m]$          | $z[m]$         | $T[s]$      |
|--------|-----------------|-----------------|----------------|-------------|
| 2      | 17659178.81745  | -13590006.53788 | 14086114.95031 | 0,073923001 |
| 8      | 26503095.68707  | 511457.184848   | 4285852.242236 | 0,075115326 |
| 13     | 8777316.600455  | 13543415.5292   | 20946374.48306 | 0,069640565 |
| 4      | 25951306.37601  | -5954418.774026 | 2473063.773507 | 0,077394494 |
| 7      | 20737287.78473  | 7172181.497267  | 15083117.48192 | 0,068481904 |
| 5      | 4695522.059531  | -16630771.96822 | 20135128.09446 | 0,078443518 |
| 10     | 14538731.97176  | -5934210.231625 | 21270816.39092 | 0,069400126 |
| 23     | 3278713.689983  | 21079650.66182  | 15586012.93833 | 0,075496772 |
| 16     | -9343720.838091 | 12117571.62344  | 21715508.80713 | 0,080564539 |

Naprogramovali sme algoritmus podľa tretej kapitoly, ktorý využíva Cramerovo pravidlo. Program vypočíta polohy pre všetky štvorice z deviatich satelitov. Teda  $\binom{9}{4} = 126$  možných polôh prijímača. Pre názornosť sme na výstup nechali vypísať 5 štvoríc.

```
format long;
X=readExcel('document.xls', 12);
Y=readExcel('document.xls', 13);
Z=readExcel('document.xls', 14);
T=readExcel('document.xls', 25);
c=299792458;
syms t; %v dalsom vypocte budeme potrebovat pocitat s parametrom
comb = combnk(1:9,4); %vytvori nam pole vsetkych stvoric

for p=1:126 %prechadzame vsetky mozne stvorice
    k=comb(p,1);
    l=comb(p,2);
    m=comb(p,3);
    n=comb(p,4);

    %konstanty
    beta1=c^2*(T(l)^2-T(k)^2)+ X(k)^2-X(l)^2+Y(k)^2-Y(l)^2+Z(k)^2-Z(l)^2;
    beta2=c^2*(T(m)^2-T(k)^2)+ X(k)^2-X(m)^2+Y(k)^2-Y(m)^2+Z(k)^2-Z(m)^2;
    beta3=c^2*(T(n)^2-T(k)^2)+ X(k)^2-X(n)^2+Y(k)^2-Y(n)^2+Z(k)^2-Z(n)^2;

    %nasleduje algoritmus z podkapitoly 3.2.1
    B=[2*(X(k)-X(l)) 2*(Y(k)-Y(l)) 2*(Z(k)-Z(l));
        2*(X(k)-X(m)) 2*(Y(k)-Y(m)) 2*(Z(k)-Z(m));
        2*(X(k)-X(n)) 2*(Y(k)-Y(n)) 2*(Z(k)-Z(n))];
    Bx=[2*c^2*t*(T(k)-T(l))+beta1 2*(Y(k)-Y(l)) 2*(Z(k)-Z(l));
        2*c^2*t*(T(k)-T(m))+beta2 2*(Y(k)-Y(m)) 2*(Z(k)-Z(m));
        2*c^2*t*(T(k)-T(n))+beta3 2*(Y(k)-Y(n)) 2*(Z(k)-Z(n))];
    By=[2*(X(k)-X(l)) 2*c^2*t*(T(k)-T(l))+beta1 2*(Z(k)-Z(l));
        2*(X(k)-X(m)) 2*c^2*t*(T(k)-T(m))+beta2 2*(Z(k)-Z(m));
```

```

2*(X(k)-X(n)) 2*c^2*t*(T(k)-T(n))+beta3 2*(Z(k)-Z(n))];
Bz=[2*(X(k)-X(1)) 2*(Y(k)-Y(1)) 2*c^2*t*(T(k)-T(1))+beta1;
2*(X(k)-X(m)) 2*(Y(k)-Y(m)) 2*c^2*t*(T(k)-T(m))+beta2;
2*(X(k)-X(n)) 2*(Y(k)-Y(n)) 2*c^2*t*(T(k)-T(n))+beta3];
xt=det(Bx)/det(B);
yt=det(By)/det(B);
zt=det(Bz)/det(B);

eqq=(xt-X(k))^2+(yt-Y(k))^2+(zt-Z(k))^2-c^2*(T(k)-t)^2;
tttsolve=solve(eqq,t);

eqq1=sqrt((xt)^2+(yt)^2+(zt)^2);
%v podmienke zistujeme spravne riesenie
if double(subs(eqq1, t, tttsolve(1)))<double(subs(eqq1, t, tttsolve(2)))
tod=tttsolve(1);
else
tod=tttsolve(2);
end
x=double(subs(xt, t, tod)); %vypocet x s dosadenim parametru tod
y=double(subs(yt, t, tod)); %vypocet y s dosadenim parametru tod
z=double(subs(zt, t, tod)); %vypocet z s dosadenim parametru tod
end

```

Výstup Matlabu:

| č.m. | Čísla satelitov: |    |    |    | tod[s]                 |
|------|------------------|----|----|----|------------------------|
|      | 1.               | 2. | 3. | 4. |                        |
| 1.   | 5                | 10 | 23 | 16 | 7.581702119643361e-010 |
| 2.   | 8                | 13 | 4  | 7  | 2.193923848605887e-009 |
| 3.   | 8                | 5  | 10 | 23 | 1.968283982987624e-010 |
| 4.   | 2                | 13 | 7  | 5  | 2.828170340911516e-008 |
| 5.   | 2                | 8  | 13 | 7  | 3.250390289153302e-009 |

| Vypočítané hodnoty prijímača zo štvorice satelitov: |                       |                       |                       |
|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| č.m.  | x[m]                  | y[m]                  | z[m]                  |
| 1.  | 4.000375732776336e+06 | 1.190831573292132e+06 | 4.807182394707825e+06 |
| 2.  | 4.000376437151264e+06 | 1.190830201235336e+06 | 4.807183631839505e+06 |
| 3.  | 4.000375843096084e+06 | 1.190831545768962e+06 | 4.807182099512342e+06 |
| 4.  | 4.000380520107073e+06 | 1.190829837468897e+06 | 4.807192818940337e+06 |
| 5.  | 4.000376776876287e+06 | 1.190831454374800e+06 | 4.807182981871780e+06 |

Následne sme urobili výpočet založený na iteráciách (vzťah (4.1)) pre prevod do zemepisných geodetických súradníc.

```

X = 4.000376769701590e+06;
Y = 1.190832022152060e+06;
Z = 4.807180959242958e+06;
format long
presnost=1;

```

```

ItB=zeros(1,50);
ItN=zeros(1,50);
ItH=zeros(1,50);
L=atan(Y/X);
p=sqrt(X^2+Y^2);
ItB(1)=atan(Z/((1-e^2)*p));
ItN(1)=(a/sqrt(1-e^2*(sin(ItB(1,1)))^2));
ItH(1)=0;
f=1;
while presnost>1e-030
    f=f+1;
    ItB(f)=atan(Z/(p*(1-e^2*ItN(f-1)/(ItN(f-1)+ItH(f-1)))));
    ItN(f)=(a/sqrt(1-e^2*(sin(ItB(f)))^2));
    ItH(f)=(p/cos(ItB(f)))-ItN(f);
    presnost=(ItB(f)-ItB(f-1))^2+(ItN(f)-ItN(f-1))^2+(ItH(f)-ItH(f-1))^2;
end
L=(L*180)/pi;
B=(ItB(f)*180)/pi;
H=ItH(f);
pocet_iteraci=f;

```

Výstup programu:

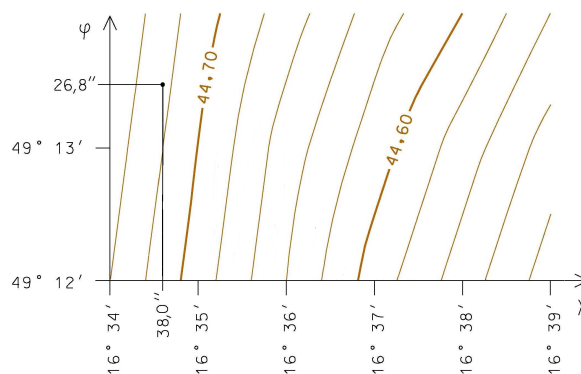
| Vypočítané hodnoty prijímača zo štvorice satelitov: |                    |                    |                       |         |
|---|--------------------|--------------------|-----------------------|---------|
| č.m.  | L[°]               | B[°]               | H[m]                  | poč.it. |
| 1.  | 16.577212233362662 | 49.224123392787583 | 4.068363262321800e+02 | 7       |
| 2.  | 16.577191422891556 | 49.224128726124597 | 4.079584155250341e+02 | 8       |
| 3.  | 16.577211439180655 | 49.224120992923311 | 4.066767103550956e+02 | 8       |
| 4.  | 16.577170646069032 | 49.224156736168375 | 4.174035038361326e+02 | 7       |
| 5.  | 16.577206579586001 | 49.224120258204621 | 4.079123705690727e+02 | 8       |

## 5.2 Výpočet nadmorskej výšky

Pre výpočet nadmorskej výšky potrebujeme určiť  $\zeta$  prevýšenie kvázigeoidu nad elipsoidom. Podľa obrázku 13., kde sme vyznačili súradnice polohy merania, vidíme že v oblasti nášho merania je povrch kvázigeoidu približne rovinňý. Preto môžeme pre určenie hodnoty  $\zeta$  preložiť hodnoty rovinňou interpoláciou troch bodov.

Na obrázku 14. môžeme vidieť body geodetických meraní získaných z webovej stránky [http://bodovapole.cuzk.cz/\\_mapTop.aspx](http://bodovapole.cuzk.cz/_mapTop.aspx), odkiaľ sme taktiež získali hodnoty uvedené v nasledujúcej tabuľke.

| body | B[°]        | L[°]        | $\zeta$ [m] |
|------|-------------|-------------|-------------|
| 211  | 49,21923772 | 16,56650633 | 44,75       |
| 212  | 49,21893389 | 16,57646794 | 44,73       |
| 239  | 49,22852669 | 16,58656742 | 44,71       |
| 241  | 49,21794519 | 16,58790408 | 44,71       |
| 257  | 49,22972875 | 16,57754792 | 44,73       |



Obr. 13: Vytvorený model CR2000[4] kvázigeoidu nad časťou Brna.

## Interpolácia

Interpolovať môžeme nasledovne, vyberiem tri body (napríklad 211, 241 a 257). Pretože zemepisná šírka, zemepisná dĺžka a elipsoidická výška tvoria provouhlú sústavu súradníc, môžeme si situáciu zakresliť do obrázku 15. Bod z najnižšou hodnotou  $\zeta$  označíme bodom  $A$ , druhý najnižší  $B$  a tretí  $C$ . Ďalej priemety bodov  $B$  a  $C$  do roviny  $\zeta = 44,71$  m označíme  $B'$  a  $C'$ , pričom  $A \equiv A'$ . Zaznačíme priemet bodu prijímača do roviny  $\zeta = 44,71$  m ako  $D'$ , jeho zemepisnú šírku a dĺžku poznáme. Označíme v bodoch  $B'$  a  $C'$  prevýšenia  $\zeta_B = 0,02$  m a  $\zeta_C = 0,04$  m. Následne preložíme rovinou  $ABC$  a zaznačíme bod  $D$  do tejto roviny ako priemet bodu  $D'$  v smere  $\zeta$ . Našou úlohou je zistiť  $\zeta_D$ . Vektory  $\bar{w}$  a  $\bar{v}$  zadajme rozdielom bodov  $\bar{w} = B' - A'$  a  $\bar{v} = C' - A'$ . Na rovine  $\zeta = 44,71$  m vytvoríme bázu z vektorov  $\bar{w}$  a  $\bar{v}$ . Teda bod  $C'$  vyjadríme v tejto báze súradnicami  $[0, 1]$  a bod  $A'$  súradnicami  $[0, 0]$ . Hľadáme takéto vyjadrenie v súradniciach pre bod  $D' = [x, y]$ , keďže  $A'$  je počiatok,  $D'$  je vyjadrený vektorom  $\bar{u} = D' - A'$  s pôsobiskom v počiatku.

Sústava vyzerá nasledovne

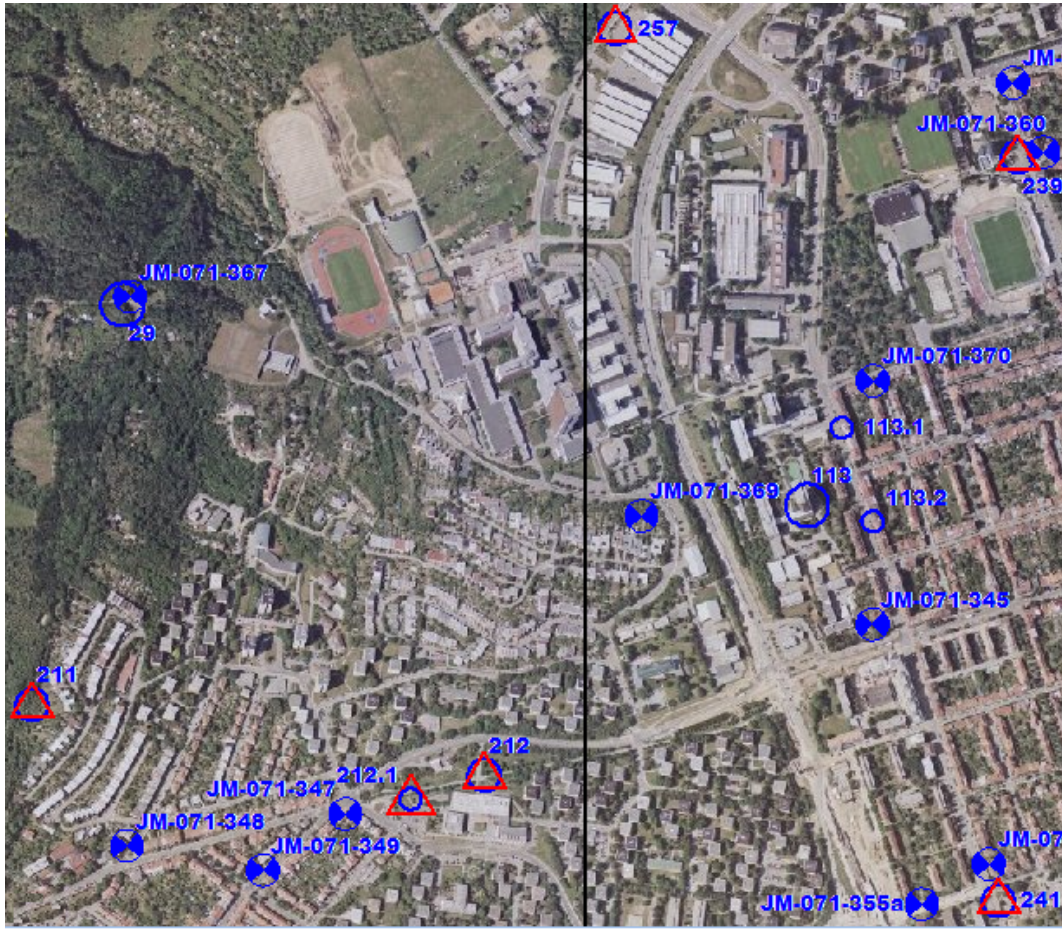
$$x\bar{w} + y\bar{v} = \bar{u}$$

Výpočet v Matlabe(v celom programe uvažujeme ale neznačíme symbol ' pre bod):

```
A=[49.21794519 16.58790408];
B=[49.22972875 16.57754792];
C=[49.21923772 16.56650633];
D=[49.224107325 16.57721407778];
w=B-A
v=C-A
d=D-A
syms x y
[x y]=solve(x*w'+y*v'-d')
```

Výstup programu:

```
[x y]= [0.4944 0.2603]
```



Obr. 14: Mapa Bodových polí v okolí FSI.

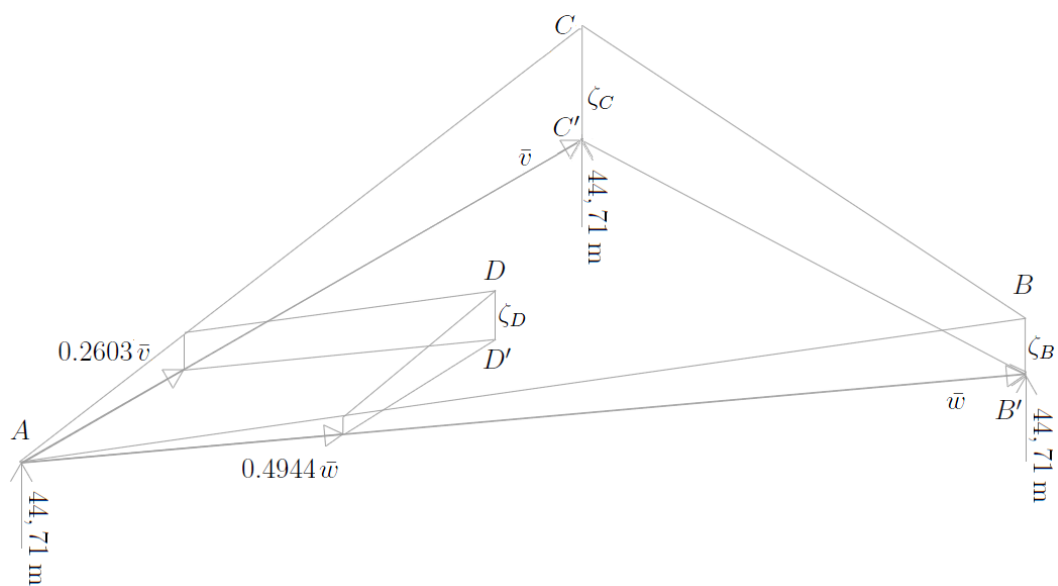
Výsledok nám hovorí, že bod  $D'$  je vyjadrený v báze tvorenej prvkami  $\bar{w}$  a  $\bar{v}$  súradnicami  $[0.4944, 0.2603]$ . Teraz uvažujme aj zložky v smere elipsoidickej výšky. Keďže prekladáme interpoláciu rovinou, platí, že dĺžka  $\zeta_D$  je tvorená práve 0.4944-krát dĺžkou  $\zeta_B$  a 0.2603-krát dĺžka  $\zeta_C$ . Preto dostaneme výsledok  $\zeta_D = 0,0203$  m.

Výsledkom je, že v našom bode je prevýšenie  $\zeta = 44,71 + \zeta_D = 44,7303$  m. Preto môžeme ďalej dosadiť hodnotu do vzťahu (4.2)  $H = H_Q + \zeta$  resp.  $H_Q = H - \zeta$ . Keďže elipsoidickú výšku máme  $H = 406.482$  m, nadmorská výška nám vyjde

$$H_Q = H - \zeta = 406.482 - 44,7303 = 361.7517 \text{ m.}$$

Vypočítali sme teda nadmorskú výšku, v bode prijímača, na streche budovy A1 FSI VUT v Brne.





Obr. 15: Interpolácia prevýšenia  $\zeta_D$ .

## 6 Záver

V teoretickej časti sme kládli dôraz na zavedenie determinantu a jeho výpočet, kde sme urobili menší rozbor. Potom sme odvodili geometricky Cramerovo pravidlo pre  $\mathbb{R}^3$ . Získané vedomosti sme následne aplikovali v teoretickom výpočte. Získali sme vedomosti o niektorých nežiaducich vplyvoch na prenos signálu z družice. Následne sme urobili úvod do problematiky geodetických meraní. V piatej kapitole sme aplikovali nadobudnuté vedomosti z predchádzajúcich kapitôl. V MATLAB-e sme naprogramovali metódu z literatúry [7], do ktorej sme použili reálne dáta. Takto sme získali niekoľko vypočítaných pozícií. Taktiež sme interpolovali hodnotu  $\zeta$ , prevýšenie kvázigeoidu nad elipsoidom, pre bod prijímača. Tým sme získali nadmorskú výšku v danom bode.

Primárnym účelom tejto práce bolo pochopenie a zjednotenie poznatkov z viacerých zdrojov a vytvorenie uceleného textu s logickým usporiadaním. Bakalárska práca môže byť využitá ako úvodný text do problematiky fungovania družicovej navigácie, založenej na kódovom meraní akým je napríklad systém GPS.

## Literatúra:

- [1] Cimbálník, M., Šimek, J.: *Geodetické polohové systémy na území České republiky, ve světě a v Evropě* /, [online]. [cit. 16. 4. 2011]. Dostupné z:   
< [http : //www.vugtk.cz/odis/sborniky/cd/cd\\_zak/systemy/obsah.htm](http://www.vugtk.cz/odis/sborniky/cd/cd_zak/systemy/obsah.htm) >
- [2] Hrdina, Z., Pánek, P., Vejražka, F.: *Rádiové určování polohy: Družicový systém GPS*, skripta, Fakulta elektrotechnická ČVUT v Praze, březen 1999, 259 s. ISBN 80-01-01386-3.
- [3] Karasek, J., Skula, L.: *Lineární algebra: Teoretická část*, skripta, Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2005, 179 s. ISBN 80-214-3100-8.
- [4] Kuruc, M.: *Kvázigeoid GPS na území města Brna* /, [online]. prosince 2006 [cit. 16. 4. 2011]. Dostupné z:   
< [http : //www.fce.vutbr.cz/veda/juniorstav2007/Sekce\\_6.1/Kuruc\\_Michal\\_CL.pdf](http://www.fce.vutbr.cz/veda/juniorstav2007/Sekce_6.1/Kuruc_Michal_CL.pdf) >
- [5] Motl, L., Zahradník, J.: *Pěstujeme lineární algebru*, 3. vyd., Univerzita Kalova v Praze, Nakladatelství Karolinum, Praha, září 2003, 348 s. ISBN 80-246-0421-3.
- [6] Nevosád, Z., Vitásek, J., Bureš, J.: *Geodézie IV: Souřadnicové výpočty*, skripta, Fakulta stavební VUT v Brně, prosinec 2002, 157 s. ISBN 80-214-2301-3.
- [7] Rousseau, CH., Saint-Aubin, Y.: *Mathematics and Technology (Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology)*, 1. vyd. Springer, 2008. 598 s. ISBN 978-0-38769215-9.
- [8] Slovák, J.: *Lineární algebra*, [online]. 1997/1998 [cit. 11. 3. 2011]. Dostupné z: < [http : //www.math.muni.cz/~slovak/index.eng.html](http://www.math.muni.cz/~slovak/index.eng.html) >
- [9] Švabenský, O., Fixel, J., Weigel, J.: *Základy GPS a jeho praktické aplikace*, 1. vyd., Fakulta stavební VUT, Akademické nakladatelství CERM, Brno, srpen 1995, 123 s. ISBN 80-214-0620-8.
- [10] Vykuřil, J.: *Vyšší geodézie: vysokoškolská učebnice pro stavební fakulty*, 1. vyd. Praha: Kartografie n.p., listopad 1982. 544 s.
- [11] Zlatoš, P.: *Lineárna algebra a geometria*, [online]. Bratislava, 2010 [cit. 11. 4. 2011]. Dostupné z: < [http : //thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG.pdf](http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG.pdf) >